

Nombres complexes II

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Exercice 1

1. (a) Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Exprimer $\sin(5\theta)$ comme polynôme en $\sin \theta$.
 (b) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation d'inconnue x : $16x^5 - 20x^3 + 5x = 0$.
 (c) Dédire des deux questions précédentes la valeur de $\sin \frac{\pi}{5}$ puis en déduire la valeur de $\cos \frac{\pi}{5}$.
2. On pose $x = \cos \frac{\pi}{5}$ et $y = \sin \frac{\pi}{5}$
 (a) Exprimer $\cos \frac{2\pi}{5}$, $\sin \frac{2\pi}{5}$ et $\sin \frac{3\pi}{5}$ en fonction de x et de y .
 (b) Démontrer que $\sin \frac{2\pi}{5} = \sin \frac{3\pi}{5}$.
 (c) En déduire les valeurs de x et de y .

Exercice 2 1. Linéariser $\sin^3 x$ et $\cos^3 x \sin^3 x$.

2. Montrer que $\forall \theta \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n 3^k \sin^3 \left(\frac{\theta}{3^k} \right) = \frac{3}{4} \left[3^n \sin \left(\frac{\theta}{3^n} \right) - \sin \theta \right]$.

Exercice 3 1. Soient $\theta, \theta' \in [0, \pi[$. Déterminer le module et un argument des nombres :

$$1 + e^{i\theta}, 1 - e^{i\theta} \text{ et } e^{i\theta} + e^{i\theta'}.$$

2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations $z^2 = 1 + e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $z^2 + 2e^{i\theta}z - 1 - 2e^{i\theta} = 0$.

Exercice 4 Écrire les nombres complexes suivants sous forme exponentielle .

$$1. \frac{5\sqrt{2}}{4} + i\frac{5\sqrt{2}}{4} \quad 2. \frac{2}{1 - i\sqrt{3}} \quad 3. \left(\frac{1-i}{1+i} \right)^7 \quad 4. \frac{i(1+i\sqrt{3})^3}{(\sqrt{3}-i)^4}$$

Exercice 5 1. Écrire sous forme exponentielle a) $(1 - i\sqrt{3})^6 e^{3i\pi/4}$ b) $\left(\frac{1 + e^{2i\pi/3}}{\sqrt{6} + i\sqrt{2}} \right)^3$.

2. Pour quelles valeurs de $n \in \mathbb{N}$, le nombre complexe $(1 + i)^n$ est-il imaginaire pur ?

Exercice 6 On considère la transformation du plan complexe d'origine O qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = (1 + i)z$.

1. Faire une figure et placer les images des points $A(1)$, $B(2)$ et $C(-1 + i)$.
2. Montrer que f est la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O dont on précisera l'angle pour l'une et le rapport pour l'autre.
3. Pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, quelle est la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = re^{i\theta}z$?

Exercice 7 Soit α un nombre de l'intervalle $[-\pi, \pi[$. On considère l'équation (E) d'inconnue $z \in \mathbb{C}$, $z^2 - 2e^{i\alpha}z + 2i \sin \alpha e^{i\alpha} = 0$

1. (a) Écrire cette équation sous la forme $(z - u)^2 = v$ où u et v sont des nombres complexes dépendant de α que l'on donnera sous la forme trigonométrique.
 (b) Résoudre l'équation (E) .
 (c) On note z_1 et z_2 les racines de cette équation, M_1 et M_2 leurs images dans le plan. Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment M_1M_2 quand α décrit $[-\pi, \pi[$?
2. Déterminer le module et un argument de z_1 et z_2 quand α est différent de $-\pi$ et de 0 .
3. On pose $s_1 = z_1^2$ et $s_2 = z_2^2$. On appelle S_1 et S_2 les points d'affixes respectives s_1 et s_2 .
 (a) O désignant l'origine du plan complexe, montrer que les points S_1 , S_2 et O sont alignés.
 (b) Montrer que la longueur du segment S_1S_2 est constante.
 (c) Quel est l'ensemble décrit par le milieu du segment S_1S_2 quand α décrit $[-\pi, +\pi[$?

Exercice 8 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \frac{z+1}{z-1} + 1 = 0$
2. $z^n = 1 - i\sqrt{3}$
3. $(z+i)^n + (z-i)^n = 0$
4. $(1+z^2)^n - (z-i)^n = 0$
5. $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$.
6. $e^z = 1 + i$.

Exercice 9 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \in i\mathbb{R}$.