Correction du devoir n$^{\text{o}}$ 2

Exercice 1

1. $\forall x \in \mathbb{R},\ 1+x^2>0$. Donc $\boxed{u \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$u'(x)=\frac{1\times\sqrt{1+x^2}-x\times\frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2}=\frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}}\times\frac{1}{1+x^2}.$$
Comme $\sqrt{1+x^2}=(1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, on a bien : $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ u'(x)=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

   Pour tout $x\in\mathbb{R}$, $|x|=\sqrt{x^2}<\sqrt{1+x^2}$ donc $|u(x)|=\dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}}<1$ car $\sqrt{1+x^2}>0$.

   Ainsi, $\forall x\in\mathbb{R},\ -1<u(x)<1$. Donc $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme composée de fonctions définies et dérivables. De plus, pour tout $x\in\mathbb{R}$, on a :
$$h'(x)=\frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}}=\frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\times\frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$
Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h'(x)=\frac{1}{1+x^2}=\arctan'(x)}$.

3. On en déduit qu'il existe une constante $C\in\mathbb{R}$ telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\arctan(x)+C$.

   $h(0)=\arcsin(0)=0=\arctan(0)$ donc $C=0$ et $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ h(x)=\arctan(x)}$.

Exercice 2

1. Pour tout réel x, $f(x)=3^x\left(3^x-3\right)+2=\mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(\mathrm{e}^{x\ln(3)}-3\right)+2$.

   $\ln(3)>0$ donc $\boxed{f(x)\underset{x\to-\infty}{\longrightarrow}2 \text{ et } f(x)\underset{x\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty}$, par opérations sur les limites.

2. Pour tout réel x, $f(x)=\mathrm{e}^{2x\ln(3)}-3\mathrm{e}^{x\ln(3)}+2$.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions dérivables et
$$f'(x)=2\ln(3)\mathrm{e}^{2x\ln(3)}-3\ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(3)}=2\ln(3)3^{2x}-3\ln(3)3^x=2\ln(3)3^x\left(3^x-\frac{3}{2}\right).$$
Donc $\boxed{\forall x\in\mathbb{R},\ f'(x)=2\ln(3)3^x\left(3^x-\frac{3}{2}\right)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x)$ est du signe de $3^x - \dfrac{3}{2}$ car $2\ln(3)3^x > 0$. De plus,

$$3^x - \frac{3}{2} > 0 \Longleftrightarrow 3^x > \frac{3}{2} \underset{\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\Longleftrightarrow} x\ln(3) > \ln(3/2) \underset{\ln(3)>0}{\Longleftrightarrow} x > \frac{\ln(3/2)}{\ln(3)};$$

$$f\left(\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{2\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} - 3\mathrm{e}^{\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} + 2 = \mathrm{e}^{\ln(9/4)} - 3\mathrm{e}^{\ln(3/2)} + 2 = \frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 2 = -\frac{1}{4}.$$

On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	$\searrow$	$-\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$+\infty$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$. On a

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = 3^x \end{cases},$$

trinôme du second degré de racines évidentes 1 et 2. Donc

$$f(x) = 0 \Longleftrightarrow (3^x = 1 \text{ ou } 3^x = 2) \Longleftrightarrow (x\ln(3) = \ln(1) \text{ ou } x\ln(3) = \ln(2)).$$

Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } S = \left\{0; \frac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}}$.

À l'aide du tableau de variation de f, on en déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection et le tableau de variation de f,

$\boxed{f \text{ réalise un bijection de } I \text{ dans l'intervalle } f(I) = J = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[}$.

6. Soit $y \in \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ fixé quelconque et $x \in \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$. On a :

$$y = f(x) \Longleftrightarrow (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = y \Longleftrightarrow \left(3^x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y + \Longleftrightarrow \left(3^x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}.$$

De plus, $y+\frac{1}{4}\geq 0$ et $x\ln(3)\geq \ln(3/2)$ (car $\ln(3)>0$) donc $3^x\geq\frac{3}{2}$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$). Donc

$$y=f(x)\iff 3^x-\frac{3}{2}=\sqrt{y+\frac{1}{4}}\iff 3^x=\frac{3}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}\iff x\ln(3)=\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{y+\frac{1}{4}}\right).$$

D'où $\boxed{f_{|I}^{-1}\left|\begin{array}{ccc}[-\frac{1}{4},+\infty[& \longrightarrow & \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln 3},+\infty\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\frac{3}{2}+\sqrt{x+\frac{1}{4}}\right)}{\ln 3}\end{array}\right.}$

Exercice 3

1. (a) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle\sum_{j=0}^{n}2^{2j+1}=\sum_{j=0}^{n}2\times 4^j\underset{4\neq 1}{=}2\times\frac{1-4^{n+1}}{1-4}$.

   Donc $\boxed{\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad \displaystyle\sum_{j=0}^{n}2^{2j+1}=\frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)}$.

   (b) Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On a : $\displaystyle S_n=\sum_{0\leq i\leq j\leq n}2^i2^j=\sum_{j=0}^{n}\sum_{i=0}^{j}2^j2^i\underset{\text{linéarité}}{=}\sum_{j=0}^{n}2^j\sum_{i=0}^{j}\times 2^i$

   $$\text{donc}\quad S_n=\sum_{j=0}^{n}2^j\frac{1-2^{j+1}}{1-2}=\sum_{j=0}^{n}\left(2^{2j+1}-2^j\right)\underset{\text{linéarité}}{=}\sum_{j=0}^{n}2^{2j+1}-\sum_{j=0}^{n}2^j.$$

   D'après le résultat de la question 1., on a :

   $$S_n=\frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)-\frac{1-2^{n+1}}{1-2}=\frac{2}{3}\left(4^{n+1}-1\right)+1-2^{n+1}.$$

   Donc $\boxed{S_n=\frac{2}{3}\times 4^{n+1}-2^{n+1}+\frac{1}{3}}$.

2. Soient $n\in\mathbb{N}^*$ et $p\in]0,1[$ fixés.

   (a) Par la formule du binome, $\boxed{\forall a,b\in\mathbb{C},\quad (a+b)^{n-1}=\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}a^kb^{n-1-k}}$.

   (b) Soit $k\in[\![1,n]\!]$. On a $k!=k\times(k-1)!$ et

   $$k\binom{n}{k}=k\frac{n!}{(n-k)!k\times(k-1)!}=\frac{n\times(n-1)!}{((n-1)-(k-1))!(k-1)!}.$$

   Donc $\boxed{\forall k\in[\![1,n]\!],\quad k\binom{n}{k}=n\binom{n-1}{k-1}}$.

(c) On en déduit que $E_{n,p} \underset{\text{linéarité}}{=} n \sum_{k=1}^{n} \begin{pmatrix} n-1 \\ k-1 \end{pmatrix} p^k (1-p)^{n-k}$.

Par le changement d'indice $j = k-1 \Longleftrightarrow k = j+1$, on obtient

$$E_{n,p} = n \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} p^{j+1} (1-p)^{n-j-1} \underset{\text{linéarité}}{=} np \sum_{j=0}^{n-1} \begin{pmatrix} n-1 \\ j \end{pmatrix} p^j (1-p)^{n-1-j}.$$

D'après le résultat de la question 1., $E_{n,p} = np(p+1-p)^{n-1} = np \times 1^{n-1}$. Donc $\boxed{E_{n,p} = np}$.

Exercice 4

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 \neq 0$, donc la fonction $f_n : x \mapsto \dfrac{1}{(1+x^2)^n}$ est continue sur $\mathbb{R}$ comme inverse d'une fonction qui l'est et qui ne s'annule pas.

   D'après le théorème fondamental du calcul intégral, f_n admet une unique primitive sur $\mathbb{R}$ qui s'annule en 0, et celle-ci est définie par :

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_n(x) = \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t}.$$

2. $F_1(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{1+t^2} \mathrm{d}t = [\arctan(t)]_0^x$. Donc $\boxed{F_1(x) = \arctan(x)}$.

3. On pose $t = \tan(u)$. La fonction tangente est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

   De plus, $0 = \tan(0)$, $1 = \tan\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$ et $\mathrm{d}t = (1 + \tan^2(u))\mathrm{d}u$.

   Par la formule de changement de variable, on a :

   $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2} \mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\tan^2(u)}{(1+\tan^2(u))^2} \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{1+\tan^2(u)} \mathrm{d}u = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \cos^2(u) \mathrm{d}u.$

   Donc $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1+\cos(2u)}{2} \mathrm{d}u = \left[\frac{u}{2} + \frac{\sin(2u)}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$. Donc $\boxed{I = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}}$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On pose $u(t) = t$ et $v(t) = (1+t^2)^{-n}$. u et v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et $\forall t \in \mathbb{R}$, $u'(t) = 1$ et $v'(t) = -2nt(1+t^2)^{-n-1}$.

   Donc, par intégration par parties et par linéarité de l'intégrale, on a :

$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t = \left[\frac{t}{(1+t^2)^n}\right]_0^x + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t.$$

   Donc $\boxed{\displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n} \mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}} \mathrm{d}t \quad (1)}$.

5. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. On a :
$$\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t = \int_0^x \frac{1+t^2-1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \underset{\text{linéarité}}{=} \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t - \int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t \quad (2).$$
Par (1) et (2), on a : $F_n(x) = \dfrac{x}{(1+x^2)^n} + 2nF_n(x) - 2nF_{n+1}(x)$.

Finalement $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ 2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}}$.

6. Si $n=1$, on obtient $\forall x \in \mathbb{R} :\ 2F_2(x) = F_1(x) + \dfrac{x}{1+x^2} = \arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}$.

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ F_2(x) = \dfrac{1}{2}\left(\arctan(x) + \dfrac{x}{1+x^2}\right)}$.

On retrouve ainsi que $I = F_2(1) = \dfrac{1}{2}\left(\arctan(1) + \dfrac{1}{1+1^2}\right) = \dfrac{\pi}{8} + \dfrac{1}{4}$, car $\arctan(1) = \dfrac{\pi}{4}$.