

Devoir maison n° 4

A rendre le jeudi 8 octobre 2026

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0, +\infty[$ par $d(x) = x^2 \ln x - x + 1$.
 - (a) Déterminer les fonctions d' et d'' .
 - (b) En déduire les variations de d' .
 - (c) Montrer que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$.
 - (d) Établir les variations puis le signe de d .
2. Donner une équation de la tangente T à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
3. Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.
4. Tracer la tangente T et l'allure de la courbe représentative de f .

Exercice 2 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$

On note C_f sa courbe représentative dans un repère du plan.

1. Montrer que f est définie et dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ puis calculer sa dérivée f' .
2. Pour $x > 1$, on pose $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1}$
 - (a) Calculer $\varphi'(x)$. En déduire le sens de variation de φ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
 - (b) Calculer la limite de φ en $+\infty$. En déduire le signe de φ sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
3. Déterminer les variations de f sur $]1, +\infty[$.
4. Déterminer la limite de f en 1.
5. (a) Rappeler la valeur de la limite en 0 de la fonction $u \mapsto \frac{\ln(1+u)}{u}$.
(b) En déduire la limite de la fonction f en $+\infty$.
6. La courbe C_f admet-elle une ou plusieurs asymptotes ? Justifiez votre réponse.