Devoir surveillé n° 2

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.

La qualité de la rédaction, la clarté des raisonnements, la présentation et l'orthographe font partie des critères de notation. Les résultats doivent être encadrés ou soulignés.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice 1 (3,5 points) **1+1+1,5**

Soient les fonctions $h : x \mapsto \arcsin\left(\dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et $u : x \mapsto \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
2. Montrer que la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$.
3. Déduire de ce qui précède que, $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \arctan(x)$.

Exercice 2 (6 points) **1+1+1,5 +1 +0,5+1**

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{2x} - 3^{x+1} + 2$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signe de la fonction f.
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$ dans l'intervalle $J = \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$.
6. Expliciter la bijection réciproque de $f_{|I} : I \longrightarrow J$ (restriction de f à I).

Exercice 3 (5 points) **1+1+0,5+1+1,5**

1. (a) Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{j=0}^{n} 2^{2j+1}$.

   (b) En déduire la valeur de la somme triangulaire $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \sum_{j=i}^{n} 2^{i+j}$ en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$ fixés.

   L'objectif est de calculer $E_{n,p} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$.

   (a) Développer $(a+b)^{n-1}$, où a et b sont des nombres complexes quelconques.

   (b) Montrer que pour tout $k \in [\![1,n]\!]$, $k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}$.

   (c) En déduire, à l'aide d'un changement d'indice, que $E_{n,p} = np$.

Exercice 4 (5,5 points) **0,5+0,5+1,5+1,5+0,5+1**

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \in \mathbb{R}$, $F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction F_n est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer $F_1(x)$.

3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$.

4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\,\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\,\mathrm{d}t.$$

5. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$.

6. Expliciter alors $F_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Vérifier que l'on retrouve ainsi le résultat de la question 3.