

Cours 04

Exemple 9 $f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - i$

① On montre que f admet un unique point fixe $\Omega(w)$:

$$f(z) = z \quad (\Rightarrow) \quad (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - i = z \quad (\Rightarrow) \quad (\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1)z = -2 + i$$

$$(\Rightarrow) \quad z = \frac{-2 + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1} = w$$

② On écrit l'écriture complexe de la composée d'une homothétie de rapport r avec la rotation d'angle θ , de même centre Ω :

$$r_\theta(z) = e^{i\theta}(z - w) + w \quad h_r(z) = r(z - w) + w$$

$$h_r(r_\theta(z)) = \underbrace{r e^{i\theta}(z - w) + r w - r w}_{r \times (r_\theta(z) - w)} + w \quad r_\theta(z)$$

$$= \underline{r e^{i\theta} z} - \underline{r e^{i\theta} w} + w = \underline{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})z} + \underline{2 - i}$$

③ On identifie $f(z)$ et $h_r(r_\theta(z))$

$$r e^{i\theta} = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2 e^{i \frac{\pi}{4}} \quad \text{d'où } r = 2 \text{ et } \theta = \frac{\pi}{4}$$

$$-r e^{i\theta} w + w = (1 - (\sqrt{2} + i\sqrt{2}))w = (1 - \sqrt{2} - i\sqrt{2}) \times \frac{-2 + i}{\sqrt{2} + i\sqrt{2} - 1}$$

$$= 2 - i$$

donc $f(z) = h_r(r_\theta(z))$

Cours 04

Exemple 10

$$U_1 = \{z \in \mathbb{C} / z = 1\} = \{1\}$$



$$U_2 = \{z \in \mathbb{C} / z^2 = 1\} = \{-1, 1\}$$



$$U_3 = \{z \in \mathbb{C} / z^3 = 1\}$$

On pose $z = r e^{i\theta}$

$$z^3 = 1 \Leftrightarrow r^3 e^{3i\theta} = 1$$

On applique $z = z'$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r^3 = 1 \\ 3\theta = 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |z| = |z'| \\ \arg(z) = \arg(z') [2\pi] \end{cases}$$

avec $|1| = 1$ et $\arg(1) = 0 [2\pi]$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \theta = 0 \left[\frac{2\pi}{3} \right] = \frac{2k\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or, l'équation $z^3 = 1$ admet au plus 3 solutions distinctes

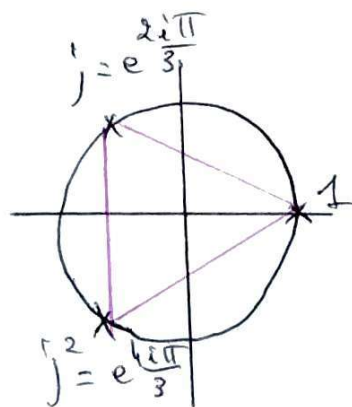
Pour $k=0$ on obtient $z=1$ (qui est solution évidente)

$$k=1$$

$$z = e^{\frac{2i\pi}{3}} = j \quad (\text{notation})$$

$$k=2$$

$$z = e^{\frac{4i\pi}{3}} = j^2 = \bar{j}$$



$$U_3 = \{1, j, j^2\}$$

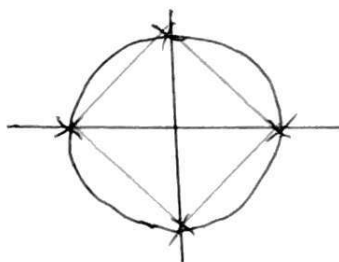
$$U_4 = \{z \in \mathbb{C} / z^4 = 1\}$$

$$z^4 = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad z^4 - 1 = 0 \quad (\Leftrightarrow) \quad (z^2 - 1)(z^2 + 1) = 0$$

$$(\Leftrightarrow) \quad z^2 = 1 \text{ ou } z^2 = -1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad z = \pm 1 \text{ ou } z = \pm i$$

$$U_4 = \{1, -1, i, -i\}$$



Dém Pte 10

$$1. \quad \forall k \in \mathbb{Z} \quad z^m = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad z = e^{\frac{2ik\pi}{m}}, \quad k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$$

On pose $z = r e^{i\theta}$

$$z^m = 1 \quad (\Leftrightarrow) \quad r^m e^{im\theta} = 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} r^m = 1 \\ m\theta = 0 [2\pi] \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} r = 1 \\ \theta = \frac{2k\pi}{m}, \quad k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Or pour $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, on obtient m racines distinctes.

En effet, si $k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket$, $0 \leq \frac{2k\pi}{m} < 2\pi$

Comme l'équation $z^m = 1$ admet au plus m racines distinctes, on peut écrire toutes les solutions sous la forme

$$U_m = \left\{ e^{\frac{2ik\pi}{m}}, k \in \llbracket 0, m-1 \rrbracket \right\}$$

2. Si on pose $\omega = e^{\frac{2i\pi}{m}}$, on a alors $\omega^k = e^{\frac{2ik\pi}{m}}$

et cet ensemble s'écrit $\underline{U_m = \{1, \omega, \omega^2, \dots, \omega^{m-1}\}}$

$$3 - 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = \frac{1 - \omega^n}{1 - \omega} \quad \text{car } \omega \neq 1$$

Or ω est solution de l'équation $z^n = 1$ donc $\omega^n = 1$

$$\text{et } 1 + \omega + \dots + \omega^{n-1} = 0$$

La somme des racines n-ième de l'unité est nulle

4. L'image de $\mathcal{D}_n$ est un polygone à n côtés, inscrit dans le cercle car $|\omega^k| = 1 \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ dont un sommet a pour affixe 1 car 1 est toujours solution de l'équation $z^n = 1$.

Il reste à montrer ce polygone est régulier.

Si on note A_k le point d'affixe ω^k , il suffit de démontrer que $A_k A_{k+1}$ est une longueur indépendante de k :

$$A_k A_{k+1} = |\omega^{k+1} - \omega^k| = |\omega^k (\omega - 1)| = \underbrace{|\omega^k|}_1 |\omega - 1|$$

$$\text{Or } |\omega - 1| = \left| e^{\frac{2i\pi}{n}} - 1 \right| = \left| 2 \underbrace{\cos \frac{\pi}{n}}_{\sin \frac{\pi}{n}} e^{i\frac{\pi}{n}} \right| = \left| 2 \underbrace{\cos \frac{\pi}{n}}_{\sin \frac{\pi}{n}} \right| \neq$$

factorisation angle
moitié

R.g On peut aussi utiliser la conservation des longueurs par la rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{n}$

vu que $A_{k+1} = r(A_k) \quad \forall k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$

Cours 04

Exple 11

$$a = 8i = 8e^{i\frac{\pi}{2}}$$

$$z^3 = a \quad (\Leftrightarrow) \quad z = 8^{\frac{1}{3}} e^{i\left(\frac{\pi}{2 \times 3} + \frac{2k\pi}{3}\right)} \quad k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \underbrace{z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}}_{k=0} \quad \text{ou} \quad z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{2\pi}{3}\right)} = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$\text{ou} \quad \underbrace{z = 2e^{i\left(\frac{\pi}{6} + \frac{4\pi}{3}\right)}}_{k=2} = 2e^{i\frac{9\pi}{6}} = 2e^{i\frac{3\pi}{2}} = -2i$$

$$\boxed{S = \left\{ 2e^{i\frac{\pi}{6}}, 2e^{i\frac{5\pi}{6}}, -2i \right\}}$$

5. Exponentielle complexe

$$\boxed{e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)}$$

$$\text{donc } \operatorname{Re}(e^z) = e^x \cos y \quad \text{et} \quad \operatorname{Im}(e^z) = e^x \sin y$$

$$|e^z| = e^x \quad \text{car } e^x > 0 \quad \text{et} \quad \arg(e^z) = y \pmod{2\pi}$$

Exple 12 $e^z = 1+i$

$$(\Leftrightarrow) e^x e^{iy} = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

On pose $z = x + iy$

$$\text{et } 1+i = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} e^x = \sqrt{2} \\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$(\Leftrightarrow) \quad \begin{cases} x = \ln \sqrt{2} = \frac{1}{2} \ln 2 \\ y = \frac{\pi}{4} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\boxed{S = \left\{ \frac{1}{2} \ln 2 + i\frac{\pi}{4} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}}$$

Exemple 13

$$e^z + e^{-z} = 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^z + \frac{1}{e^z} = 1$$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^{2z} + 1 = e^z$$

$$(\Leftrightarrow) \quad e^{2z} - e^z + 1 = 0 \quad \text{On pose } Z = e^z$$

et on écrit $Z^2 - Z + 1 = 0$

$$\Delta = -3 \quad Z = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$$

Il reste à résoudre $e^z = e^{\pm i\frac{\pi}{3}}$

$$\boxed{z = \pm i\frac{\pi}{3} + 2ik\pi, k \in \mathbb{Z}}$$