Correction du test n° 9

Sujet A

1. Calculer $I = \displaystyle\int_{-1}^{0} \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+4}$ $\quad \Delta = 4 - 16 = -12 < 0$

   $x^2+2x+4 = (x+1)^2+3 = 3\left[\left(\dfrac{x+1}{\sqrt{3}}\right)+1\right]$

   $u = \dfrac{x+1}{\sqrt{3}} \quad \mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$

   Si $x=-1$ alors $u=0$ et si $x=0$ alors $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}x}{3(u^2+1} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan u\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_1^3 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$ en effectuant le changement de variable $u = \sqrt{x}$.

   $\mathrm{d}u = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{2u}\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow 2u\,\mathrm{d}u = \mathrm{d}x$

   Si $x=1$ alors $u=1$ et si $x=3$ alors $u=\sqrt{3}$

   $J = \displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{2u\mathrm{d}u}{u(1+u^2)} = \int_1^{\sqrt{3}} \frac{2\mathrm{d}u}{1+u^2} = 2(\arctan\sqrt{3} - \arctan 1) = 2\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{6}$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (E) : $\quad (x^2+1)y' + 2xy = 3x^2+1$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $(E) \Leftrightarrow y' + \dfrac{2x}{x^2+1}y = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}$

   $y_H = C\mathrm{e}^{-\ln(x^2+1)} = \dfrac{C}{x^2+1}$

   MVC : $C' = \dfrac{3x^2+1}{x^2+1}(x^2+1) = 3x^2+1$

   d'où $C = x^3+x$ et $y_P = \dfrac{x^3+x}{x^2+1}$

   $y = \dfrac{x^3+x+C}{x^2+1}, C \in \mathbb{R}$

   (E_1) : $\quad y'' - 3y' - 4y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $\Delta = 25 \quad r_1 = -1$ et $r_2 = 4$

   $y = A\mathrm{e}^{-x} + B\mathrm{e}^{4x}, A, B \in \mathbb{R}$

Correction du test n° 9

Sujet B

1. Calculer $I = \displaystyle\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+4}$ $\quad \Delta = 4-16 = -12 < 0$

   $x^2-2x+4 = (x-1)^2+3 = 3\left[\left(\dfrac{x-1}{\sqrt{3}}\right)+1\right]$

   $u = \dfrac{x-1}{\sqrt{3}} \quad \mathrm{d}x = \sqrt{3}\,\mathrm{d}u$

   Si $x=1$ alors $u=0$ et si $x=2$ alors $u = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

   $I = \displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} \frac{\sqrt{3}\,\mathrm{d}x}{3(u^2+1)} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left[\arctan u\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\pi}{6\sqrt{3}}$

2. Calculer $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(x)}{1+\cos^2(x)}\mathrm{d}x$ en effectuant le changement de variable $u = \cos x$.

   $\mathrm{d}u = -\sin x \mathrm{d}x$

   Si $x=0$ alors $u=1$ et si $x = \dfrac{\pi}{2}$ alors $u=0$

   $J = \displaystyle\int_1^0 \frac{-\mathrm{d}u}{1+u^2} = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{1+u^2} = \arctan 1 = \frac{\pi}{4}$

3. Résoudre les équations différentielles suivantes :

   (E) : $\quad y'\sin x + y\cos x + 1 = 0$ sur $I =]0,\pi[$.

   $(E) \Leftrightarrow y' + \dfrac{\cos x}{\sin x}y = \dfrac{-1}{\sin x}$

   $y_H = C\mathrm{e}^{-\ln|\sin x|} = \dfrac{C}{\sin x}$ car sur $I =]0,\pi[$, $\sin x > 0$

   MVC $C' = \dfrac{-1}{\sin x}\sin x = -1$ donc $C = x$ et $y_P = \dfrac{x}{sinx}$

   $y = \dfrac{C+x}{sinx}, C^{\in}\mathbb{R}$

   (E_1) : $\quad y'' + 5y' + 6y = 0$ sur $I = \mathbb{R}$.

   $\Delta = 1 \quad r_1 = -2$ et $r_2 = -3$

   $y = A\mathrm{e}^{-2x} + B\mathrm{e}^{-3x}, A, B \in \mathbb{R}$