

Devoir maison n° 5

A rendre le jeudi 15 octobre 2026

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note (E_n) l'équation

$$(1 - iz)^n(1 - i\sqrt{3}) = (1 + iz)^n(1 + i\sqrt{3})$$

1. Montrer que si z est solution de (E_n) il en est de même de son conjugué $\bar{z}$.
2. Posons $Z = \frac{1 - iz}{1 + iz}$. Montrer que z est solution de (E_n) si et seulement si $Z^n = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Combien y a-t-il de racines n -ième de $e^{\frac{2i\pi}{3}}$? Expliciter les.
4. Pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, résoudre l'équation $\frac{1 - iz}{1 + iz} = e^{i\theta}$
5. En déduire toutes les solutions de (E_n) .

Exercice 2 Soit φ la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par

$$\varphi(z) = \frac{z - 1 - i}{1 - i - \bar{z}}$$

1. Préciser son ensemble de définition D_φ .
2. Montrer que $\varphi(z)$ est de module 1 pour tout $z \in D_\varphi$. φ est-elle surjective ?
3. Résoudre $\varphi(z) = 1$. φ est-elle injective ?
4. Déterminer $\varphi^{-1}(\mathbb{R})$.
5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On évalue dans cette question $\varphi^{-1}(\{e^{i\theta}\})$.
 - a) Montrer que $\arg(\varphi(z)) \equiv 2 \arg(z - 1 - i) + \pi[2\pi]$.
 - b) Quelle condition nécessaire et suffisante doit satisfaire $\arg(z - 1 - i)$ pour que $\varphi(z) = e^{i\theta}$?
 - c) Décrire géométriquement l'ensemble des points d'affixes les antécédents par φ de $e^{i\theta}$.
 - d) Représenter cet ensemble sur le plan complexe pour $\theta = \frac{\pi}{2}$.
6. Par quel ensemble E doit-on remplacer $\mathbb{C}$ pour que $\varphi : D_\varphi \rightarrow E$ soit surjective ?