

Calculs algébriques et systèmes linéaires

Exercice 1 Calculer les sommes et produits suivants :

$$\begin{array}{lll} 1. \text{ a) } \sum_{k=1}^n (-1)^k 2^{2k} & \text{b) } \sum_{k=1}^n (-1)^k \binom{n}{k} & \text{c) } \sum_{k=1}^n k \cdot k! \\ 2. \text{ a) } \prod_{k=1}^n k^2 (n+1-k) & \text{b) } \prod_{k=1}^n \frac{2k-1}{2k} & \text{c) } \prod_{k=1}^n \frac{(k+1)^k}{k^{k-1}} \end{array}$$

Exercice 2 Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on pose $S_n = \sum_{k=1}^n k^2$ et $u_n = \frac{6}{n} S_n$

1. (a) Calculer u_1, u_2 et u_3 .
 (b) On admet qu'il existe $a, b, c \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = an^2 + bn + c, \forall n \in \mathbb{N}^*$.
 À l'aide de la question précédente, déterminer a, b et c .
2. (a) Démontrer par récurrence que $S_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ pour tout entier naturel $n \geq 1$.
 (b) Montrer que le résultat de la question 1.(b) est bien vérifié.

Exercice 3

1. Démontrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
2. Calculer $S_n = \sum_{k=0}^n (2k)^3$ et $T_n = \sum_{k=0}^n (2k+1)^3$

Exercice 4

1. Soient $n \in \mathbb{N}$, $p \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$. Montrer que $\binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k} = \binom{p}{k} \binom{n}{p}$.
2. Calculer $S_n = \sum_{p=0}^n \sum_{k=0}^p \binom{n}{k} \binom{n-k}{p-k}$.

Exercice 5 Écrire sous forme algébrique les nombres $a = (1 - 2i)^4$, $b = \frac{(2+i)^3}{1+i}$ et $c = \sum_{k=-10}^{10} i^k$.

Exercice 6 Soit la fonction $f : \begin{cases} \mathbb{R} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto (x+1)^n \end{cases}$

1. Développer $f(x)$. En dérivant l'égalité obtenue, calculer $\sum_{k=1}^n k \binom{n}{k}$.

2. Calculer les sommes $\sum_{k=1}^n k^2 \binom{n}{k}$ et $\sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1} \binom{n}{k}$.

Exercice 7 Soit un entier naturel $n \geq 3$ fixé. On note $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ièmes de l'unité et on pose $\omega = \varepsilon^{\frac{2i\pi}{n}}$.

1. (a) Donner, sans justifier, le nombre d'éléments de $\mathbb{U}_n$, et l'expression de ces éléments en fonction de ω .
 (b) Déterminer le module et un argument de $\omega - 1$.
 (c) Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que $\omega^p \in \mathbb{U}_n$, puis déterminer les valeurs de p telles que $\omega^p = 1$.
2. (a) Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{k=0}^{n-1} \omega^{kp}$, en distinguant le cas où $\omega^p = 1$ du cas où $\omega^p \neq 1$.
 (b) Pour $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$ fixé, développer $(1 + \omega^k)^n$.
 (c) Dédurre des deux questions précédentes que $\sum_{k=0}^{n-1} (1 + \omega^k)^n = 2n$.
3. (a) Calculer la somme triangulaire $\sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=j}^{n-1} \omega^k$.
 (b) En déduire que $\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)\omega^k = \frac{n}{\omega-1}$. Écrire le résultat précédent sous forme trigonométrique.

Exercice 8 Calculer les sommes suivantes :

$$1. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n i 2^j \quad 2. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \min\{i, j\}$$

$$3. \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i \frac{i}{j+n} \quad 4. \sum_{i=0}^n \sum_{j=i}^n \binom{j}{i}.$$

Exercice 9 Soit $m \in \mathbb{R}$. Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} 5x - 6y = m \\ 6x - 7y = m + 1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} mx + y = 1 \\ 3x - 2y = 6 \end{cases}$$

Exercice 10 Résoudre les systèmes suivants :

$$1. \begin{cases} (1+i)x + (1-i)y = 4+2i \\ ix + (2i+1)y = 3i-1 \end{cases}$$

$$2. \begin{cases} (1-2i)x + 2y = 3-7i \\ 3x - (1-i)y = 11+3i \end{cases}$$

Exercice 11 Discuter en fonction des valeurs des réels a, b, c , l'ensemble des solutions du système suivant :

$$\begin{cases} 2x - y + z = a \\ -x + 2y + 2z = b \\ 4x - 5y - 3z = c \end{cases}$$