Correction du Test n° 10

Sujet A

1. $y'' - y' - 2y = 3e^{-x}$ sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 - r - 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et 2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x) = Ae^{-x} + Be^{2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   $\lambda = -1$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-x}$.

   On a $u'(x) = -kxe^{-x} + ke^{-x} = k(1-x)e^{-x}$ et $u''(x) = -ke^{-x} - k(1-x)e^{-x}$,

   donc pour que $u''(x) - u'(x) - 2u(x) = e^{-x}$, il faut choisir $k = -1$.

   Donc $u(x) = -xe^{-x}$ et $g(x) = Ae^{-x} + Be^{2x} - xe^{-x}$.

   On a $g'(x) = -Ae^{-x} + 2Be^{2x} - e^{-x} + xe^{-x}$. Ainsi $g(0) = A + B = 2$ et

   $g'(0) = -A + 2B - 1 = 0$.

   On trouve $A = 1$ et $B = 1$, donc $g(x) = e^{-x} + e^{2x} - xe^{-x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|2x - 4| \leq |x - 1|$.

   Sur l'intervalle $]-\infty, 1]$, (E) $\Leftrightarrow -2x + 4 \leq -x + 1 \Leftrightarrow x \geq 3$

   Sur l'intervalle $[1, 2]$, (E) $\Leftrightarrow -2x + 4 \leq x - 1 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{5}{3}$

   Sur l'intervalle $[2, +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow 2x - 4 \leq x - 1 \Leftrightarrow x \leq 3$

   Finalement, $\mathcal{S} = \left[\dfrac{5}{3}, 3\right]$.

Correction du Test n° 10

Sujet B

1. $y'' + 3y' + 2y = 2e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$, $g(0) = 2$ et $g'(0) = 0$.

   L'équation caractéristique est $r^2 + 3r + 2 = 0$, qui a pour solutions -1 et -2.

   Donc les solutions de l'équation homogène sont les fonctions de la forme :

   $y(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x}$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

   $\lambda = -2$ est une des solutions de l'équation homogène, donc on cherche une solution particulière sous la forme $u(x) = kxe^{-2x}$.

   On a $u'(x) = -2kxe^{-2x} + ke^{-2x}$ et $u''(x) = 4kxe^{-2x} - 4ke^{-2x}$,

   donc pour que $u''(x) + 3u'(x) + 2u(x) = 2e^{-2x}$, il faut choisir $k = -2$.

   Donc $u(x) = -2xe^{-2x}$ et $g(x) = Ae^{-x} + Be^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

   On a $g'(x) = -Ae^{-x} - 2Be^{-2x} - 2e^{-2x} + 4xe^{-2x}$. Ainsi $g(0) = A + B = 2$ et

   $g'(0) = -A - 2B - 2 = 0$.

   On trouve $A = 6$ et $B = -4$, donc $g(x) = 6e^{-x} - 4e^{-2x} - 2xe^{-2x}$.

2. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation : $|x - 4| \leq |2x - 1|$.

   Sur l'intervalle $]-\infty, \frac{1}{2}]$, (E) $\Leftrightarrow -x + 4 \leq -2x + 1 \Leftrightarrow x \leq -3$

   Sur l'intervalle $[\frac{1}{2}, 4]$, (E) $\Leftrightarrow -x + 4 \leq 2x - 1 \Leftrightarrow x \geq \frac{5}{3}$

   Sur l'intervalle $[4, +\infty[$, (E) $\Leftrightarrow x - 4 \leq 2x - 1 \Leftrightarrow x \geq -3$

   Finalement, $\mathcal{S} =]-\infty, -3] \cup \left[\frac{5}{3}, +\infty\right[$.