

Correction du devoir maison n° 4

Exercice 1 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0, +\infty[$ par $d(x) = x^2 \ln x - x + 1$.

(a) d est dérivable sur $]0, +\infty[$ par opération sur les fonctions dérivables et

$$d'(x) = 2x \ln x + x^2 \times \frac{1}{x} - 1 = 2x \ln x + x - 1$$

De même d' est dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$d''(x) = 2 \ln x + 2x \times \frac{1}{x} + 1 = 2 \ln x + 3.$$

(b) $d''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\frac{3}{2} \Leftrightarrow x > e^{-\frac{3}{2}}$

x	0	$e^{-\frac{3}{2}}$	$+\infty$
$d''(x)$		-	+
$d'(x)$		↘ ↗	

(c) $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} d'(x) = -1$

$d'(1) = 0$ et $e^{-\frac{3}{2}} < 1$ donc, d'après le tableau de variation de d' , $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$.

x	0	1	$+\infty$
$d'(x)$		-	+
$d(x)$	1	↘ ↗	$+\infty$
$d(x)$		+	+

(d)

$\lim_{x \rightarrow 0} x^2 \ln x = 0$ par croissances comparées, donc $\lim_{x \rightarrow 0} d(x) = 1$

$$d(x) = x(x \ln x - 1) + 1$$

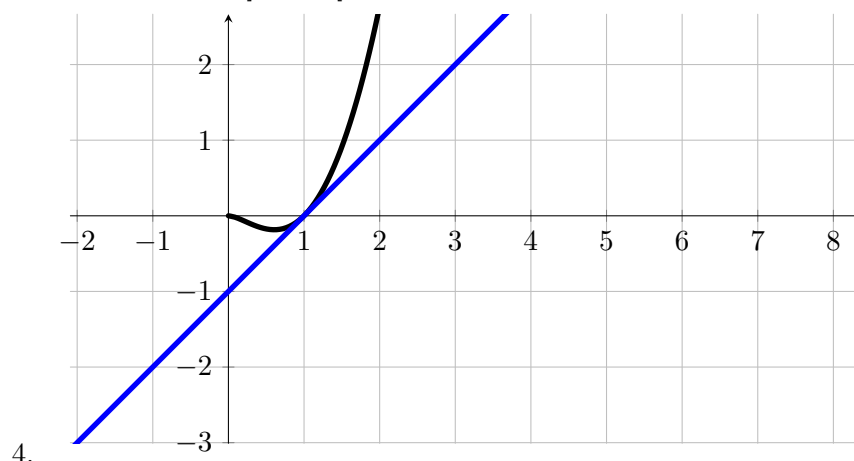
$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - 1 = +\infty$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} d'(x) = +\infty$ par produit.

2. $T : y = f'(1)(x - 1) + f(1)$

$f'(x) = 2x \ln x + x$ donc $f'(1) = 1$ et $f(1) = 0$ d'où

$$T : y = x - 1$$

3. $f(x) - (x - 1) = d(x)$ donc, d'après la question, la courbe de f est au dessus de la tangente T sur $]0, +\infty[$.



Exercice 2 On considère la fonction $f : x \mapsto \left(\frac{x}{x-1}\right)^x$.

1. $f(x) = e^{x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)}$. Si $x > 1$ alors $x - 1 > 0$ et $\frac{x}{x-1} > 0$.

De plus, $u : x \mapsto \frac{x}{x-1}$ est dérivable sur $]1, +\infty[$, comme quotient de fonctions dérivables. Donc $x \mapsto x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ est définie et dérivable sur $]1, +\infty[$ comme produit de fonctions dérivables.

Donc f est définie et dérivable sur l'intervalle $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1$,

$$\begin{aligned} f'(x) &= \left[1 \times \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x \times \frac{\frac{x-1-x}{(x-1)^2}}{\frac{x}{x-1}} \right] e^{x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} \\ &= \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) + x \times \frac{-1}{(x-1)^2} \times \frac{x-1}{x} \right] f(x). \end{aligned}$$

Donc $\forall x > 1, \quad f'(x) = \left[\ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} \right] f(x).$

2. (a) φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ comme somme de fonctions qui le sont et $\forall x > 1$,

$$\varphi'(x) = \frac{-1}{x(x-1)} - \frac{-1}{(x-1)^2} = \frac{-(x-1) + x}{x(x-1)^2} \quad \text{donc} \quad \varphi'(x) = \frac{1}{x(x-1)^2} > 0,$$

car $x > 0$ et $(x-1)^2 > 0$. Donc φ est strictement croissante sur l'intervalle $]1, +\infty[$.

(b) En $+\infty$: $\frac{x}{x-1} = \frac{1}{1-\frac{1}{x}} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 1$. Donc $\varphi(x) = \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) - \frac{1}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, par composition et opérations sur les limites.

φ est strictement croissante sur $]1, +\infty[$ et $\varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$, donc $\boxed{\forall x > 1, \varphi(x) < 0}$.

3. $\forall x > 1, f'(x) = \varphi(x)f(x) < 0$ car $\varphi(x) < 0$ et $f(x) = e^{x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right)} > 0$.

Donc $\boxed{f \text{ est strictement décroissante sur l'intervalle }]1, +\infty[}$.

4. En 1 : $\frac{x}{x-1} \xrightarrow{x \rightarrow 1+} +\infty$ car $x-1 \geq 0$. Donc $\boxed{f(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1+} +\infty}$, par composition et opérations sur les limites.

5. (a) $\lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} = 1$.

(b) $x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = x \ln\left(\frac{1}{1-\frac{1}{x}}\right) = -x \ln\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \frac{\ln\left(1 - \frac{1}{x}\right)}{-\frac{1}{x}} = \frac{\ln(1+u)}{u}$ en posant $u = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

D'après le résultat précédent, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x}{x-1}\right) = 1$ et $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = e}$ par composition des limites.

6. La courbe C_f admet une asymptote d'équation $x = 1$ d'après la question 4. et une asymptote d'équation $y = e$ en $+\infty$ d'après la question 5.(b).