

Exercices École Ouverte PCSI-PTSI

Rappels

— On définit les fonctions ch et sh par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{ch}(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad \text{et} \quad \text{sh}(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

Ces fonctions sont dérivables sur $\mathbb{R}$ avec $\text{ch}' = \text{sh}$ et $\text{sh}' = \text{ch}$.

— Arccos et Arcsin sont dérivables sur $] -1; 1[$ avec

$$\forall x \in] -1; 1[\quad \text{Arccos}'(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{et} \quad \text{Arcsin}'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

— Arctan est dérivable sur $\mathbb{R}$ avec

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad \text{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

— Pour tout réel $a > 0$ et tout réel b on définit $a^b = e^{b \ln a}$.

— Si f est dérivable en a et g dérivable en $f(a)$ alors $g \circ f : x \mapsto g(f(x))$ est dérivable en a avec

$$(g \circ f)'(a) = f'(a) g'(f(a))$$

— Une fonction $f : I \rightarrow J$ est dite bijective si pour tout $y \in J$, il existe un unique antécédent $x \in I$ tel que $y = f(x)$. À y fixé, cet unique antécédent est noté $f^{-1}(y)$.
La fonction $y \mapsto f^{-1}(y)$ est appelée la bijection réciproque de f , notée f^{-1} .

1 Fonctions

Exercice 1 Calculer les ensembles de définition, de dérivabilité, puis la dérivée des fonctions dont les expressions sont données par

$$\begin{aligned} a(x) &= (2x^2 - x - 1)^6 & b(x) &= 2x + 1 - \frac{3}{(x-2)^3} & c(x) &= x \text{Arccos}(1-x) \\ d(x) &= \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} & e(x) &= \sqrt{1-\ln(x)} & f(x) &= x^3 e^{-3x+2} \\ g(x) &= \ln(x^2 + 3x) & h(x) &= (\text{ch } x)^x & i(x) &= \text{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

Exercice 2 Résoudre les équations suivantes

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad \ln(2x^2 + 1) - 1 &= \ln(2x + 1) & \text{(b)} \quad (\ln x)^2 + 3 \ln x - 4 &= 0 & \text{(c)} \quad \ln(x) + \ln(x+3) &= 2 \ln(2) \\ \text{(d)} \quad \ln(x+1) + \ln(x-3) &= 2 \ln(x-2) & \text{(e)} \quad e^{2x} + e^x - 2 &= 0 & \text{(f)} \quad 2e^x &= e^{x^2} \end{aligned}$$

$$(g) e^x - 4e^{-x} = 1 \quad (h) \frac{\ln(x)}{\ln(a)} = \frac{\ln(a)}{\ln(x)}, a > 0, a \neq 1 \quad (i) \frac{\ln(x)}{\ln 3} - \frac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

$$(a) e^{-2x} \geq \frac{1}{2} \quad (b) e^x < \frac{1}{4}e^{x^2} \quad (c) \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$$

$$(d) \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \leq 2 \quad (e) e^x \geq e^{2x} - 1 \quad (f) \ln(e^x - e^{-x}) > 2$$

Exercice 4

- Résoudre l'équation : $\sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2} = e^x - 2$
- Résoudre l'équation de paramètre réel m : $e^x - e^{-x} = 2m$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

$$(a) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3)) \quad (b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) \quad (c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x\sqrt{x}(e^{-x})^3$$

$$(d) \lim_{x \rightarrow +\infty} (e^x - 3x^2 - 1) \quad (e) \lim_{x \rightarrow +\infty} (\ln(x) - x^2) \quad (f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} \quad (g) \lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{-x^2}$$

$$(h) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^3 + 2x^2}{x^2 + 1} e^{\frac{1}{x}} \quad (i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{e^x}$$

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x^2 \ln x$.

- On considère la fonction d définie sur $]0, +\infty[$ par $d(x) = x^2 \ln x - x + 1$.
 - Déterminer les fonctions d' et d'' .
 - En déduire les variations de d' .
 - Montrer que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0, 1]$.
 - Établir les variations puis le signe de d .
- Donner l'équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1.
- Déterminer la position relative de la courbe de f par rapport à cette tangente.
- Tracer la tangente et la courbe représentative de f .

Exercice 7 On considère la fonction f définie par $f(x) = \ln(x + \sqrt{1+x^2})$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.
 - En déduire l'ensemble de définition de f .
- Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.
 - En déduire quelle est la parité de f .

3. (a) Calculer la dérivée de f , et en donner une expression simple.
 (b) Étudier les variations de f .
 (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.
4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}[f(x)] = x$.
 (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?
 (c) En déduire la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.

Exercice 8

1. Soit $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1$. Montrer que $\psi(x) > 0$ pour tout réel x .
2. On considère maintenant la fonction $h :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\operatorname{sh}(x)} - x - 1$.
 Calculer $h'(x)$ et $h''(x)$. Observer que $h''(x) = \psi(x)e^{\operatorname{sh}(x)}$.
3. En déduire les tableaux de variations et de signes de h' puis de h .
4. Montrer que pour tout $x \in [0, 1[$ on a $1 + x \leq e^{\operatorname{sh}(x)} \leq \frac{1}{1-x}$
5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Déduire du 4) que, pour tout entier naturel supérieur ou égal à 2, alors

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leq \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leq \ln\left(\frac{np}{n-1}\right)$$

6. Posons $S_n = \sum_{k=n}^{pn} \operatorname{sh}\left(\frac{1}{k}\right)$. Déterminer la limite de la suite $(S_n)_{n \geq 2}$.

2 Nombres complexes

Exercice 1

1. Déterminer la forme algébrique des complexes suivants :

$$a = \frac{(2-i)^2}{1+2i} \quad b = \frac{5+i}{3-i} - \frac{3+i}{5-i} \quad c_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + i \sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{6n} \text{ où } n \in \mathbb{N}.$$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants où x est un paramètre réel :

$$a = \frac{3}{1+i\sqrt{3}}, b = \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^9, c = -a, d = \frac{-3b}{ia^2}, e = \sin(x) - i \cos(x) \text{ et } f = \frac{1-i \tan(x)}{1+i \tan(x)}$$

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1. Faire une figure et placer ces points.
2. Calculer $\frac{c-a}{d-a}$ et en déduire la nature du triangle ACD .
3. Montrer que les points A, B, C et D sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon.

Exercice 3

- On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.
 - Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).
 - Donner la forme trigonométrique de z_0 .
 - Donner la forme algébrique et la forme trigonométrique du nombre complexe $\frac{1}{z_0}$.
 - Placer sur la figure l'image M'_0 de $\frac{1}{z_0}$.
- On considère maintenant un nombre complexe $z = x + iy$, avec $x, y \in \mathbb{R}$, dont la partie réelle x est non nulle.
 - Donner la forme algébrique du nombre complexe $\frac{1}{z}$ en fonction de x et de y .
 - Démontrer que z et $\frac{1}{z}$ ont des parties réelles égales si et seulement si $|z| = 1$.
- On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.
 - Démontrer que $\frac{1}{a} = \bar{a}$.
 - Démontrer que $ab + ac + bc = abc(\bar{a} + \bar{b} + \bar{c})$.
 - En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Exercice 4 On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

- Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \frac{\pi}{4}$.
On donnera les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t .
On donnera là aussi les solutions sous forme algébrique et sous forme trigonométrique.
- Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \bar{z}$ (E)

- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $\cos(4\theta) = 1$.
- Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation : $x^3 = x$.
- On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).
Montrer que le module de α est nécessairement égal à 0 ou à 1.
- En déduire toutes les solutions de (E) et représenter leurs images dans le plan complexe, en prenant comme unité 2 cm.

Exercice 6 Posons $A = \sum_{k=1}^4 \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \sum_{k=1}^4 \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

- Calculer $A + B$.
- Linéariser $A - B$ puis calculer sa valeur numérique.
- En déduire les valeurs exactes de A et B .

Exercice 7 Soit a un nombre complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

$$1 - \left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right|^2 = \frac{(1 - |a|^2)(1 - |z|^2)}{|1 - \bar{a}z|^2}$$

2. Déterminer tous les nombres complexes z vérifiant $\left| \frac{z - a}{1 - \bar{a}z} \right| \leq 1$.

Exercice 8

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. Linéariser $\cos^2(k\theta)$.
2. Soient $\theta \in \mathbb{R} \setminus \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

(a) Écrire $S_n = \sum_{k=0}^n e^{2ik\theta}$ sous la forme $\lambda e^{i\alpha}$, où $\lambda, \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) Montrer que $\sum_{k=0}^n \cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta) \cos(n\theta)}{2 \sin(\theta)}$

3. Dédurre de ce qui précède que

$$1 + \cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right) + \cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{11}{4}$$

Exercice 9

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct.

Pour $z \in \mathbb{C} \setminus \{2 - i\}$, on pose $f(z) = \frac{z - 4 + 3i}{z - 2 + i}$

1. Écrire $f(2 - 5i)$ sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.
2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé.

Déterminer, suivant les valeurs de ω , le nombre de solution(s) de l'équation $f(z) = \omega$.

3. Résoudre l'équation $f(z) = z$. Interpréter géométriquement le résultat.
4. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $|f(z)| = 1$.
5. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z tels que $f(z) \in i\mathbb{R}$.

3 Bijections

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}$.

1. Déterminer l'image J de $\mathbb{R}$ par f .
2. Montrer que f est bijective de $\mathbb{R}$ dans J et expliciter son application réciproque.

Exercice 2 Montrer que l'application de $\mathbb{C}$ dans lui-même définie par $f(z) = z + 2\bar{z}$ est bijective, et expliciter son application réciproque, également sous la forme $z \mapsto \alpha z + \beta \bar{z}$, avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 3 Montrer que l'application f définie de $\mathbb{C} \setminus \{i\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \frac{z+i}{z-i}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

Exercice 4 Soient les fonctions $h : x \mapsto \arcsin\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$ et $u : x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que u est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, u'(x) = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}$.
2. Montrer que la fonction h est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $h'(x)$.
3. Dédire de ce qui précède que, $\forall x \in \mathbb{R}, h(x) = \arctan(x)$.

Exercice 5 On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3^{2x} - 3^{x+1} + 2$.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2\ln(3)3^x \left(3^x - \frac{3}{2}\right)$.
3. Étudier les variations de f et dresser son tableau de variation.
4. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation $f(x) = 0$ et dresser le tableau de signe de la fonction f .
5. Montrer que f réalise une bijection de l'intervalle $I = \left[\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$ dans l'intervalle $J = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[$.
6. Expliciter la bijection réciproque de $f|_I : I \longrightarrow J$ (restriction de f à I).

4 Sommes et produits

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants

$$\left. \begin{array}{l} 1. \sum_{k=1}^{100} 2^{-k} \\ 2. \sum_{k=0}^n \frac{3^k}{2^{2k-1}} \end{array} \right| \left. \begin{array}{l} 3. \sum_{k=1}^n z^{2k+1} \ (z \in \mathbb{C}) \\ 4. \prod_{k=1}^n 2^{2k-1} \end{array} \right| 5. = \prod_{k=1}^n 2^{k^2}$$

Exercice 2 Exprimer avec des factorielles :

$$1. \prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} \quad 2. \prod_{k=1}^n k(k+1)(k+2) \quad 3. \prod_{k=1}^n (n+k) \quad 4. \prod_{k=1}^n \frac{2k}{2k-1}$$

Exercice 3 Soit $z \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}^*$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^n k z^{k-1}$.

- Justifier que $S_n = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) z^k$.
- En déduire une expression simplifiée de $zS_n - S_n$, puis de S_n .

Exercice 4 Soit $t \in \mathbb{R}$.

- Exprimer $\sin^6 t$ en fonction de $\cos(2kt)$ pour $k \in \llbracket 0; 3 \rrbracket$.
- Exprimer $\cos(6t)$ en fonction de $\cos t$.

Exercice 5

- Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\sum_{0 \leq i, j \leq n} \binom{i}{j}$ et $\sum_{0 \leq k \leq i \leq n} \binom{n}{i} \binom{i}{k}$.
- Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer les produits $\prod_{1 \leq i, j \leq n} i^j$ et $\prod_{1 \leq i, j \leq n} x^{i+j}$.

5 Ensembles et dénombrement élémentaire

Exercice 1 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E telles que :

$$A \cap B = A \cup C \quad \text{et} \quad A \cup B = A \cap C$$

Montrer que $A = B = C$.

Exercice 2 Soient E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Soient A, B deux parties de E .

- Montrer que la réunion définissant $A \triangle B$ est disjointe.
- Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
- Montrer que $\overline{A \triangle B} = A \cap B$.
- Simplifier $A \triangle E$, $A \triangle \emptyset$, $A \triangle \overline{A}$.
- Résoudre l'équation $A \triangle X = \emptyset$ d'inconnue $X \in \mathcal{P}(E)$.