Correction du Devoir maison n° 5

Exercice 1 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, notons (E_n) l'équation

$$(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$$

1. si z est solution de (E_n) alors $(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})$.
   En prenant le conjugué des deux membres de cette égalité on obtient $\overline{(1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3})} = \overline{(1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3})}$. En utilisant les propriétés du conjugué, on a alors $(1+\mathrm{i}\overline{z})^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1-\mathrm{i}\overline{z})^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3})$ ce qui implique que $\boxed{\overline{z} \text{ est solution de } (E_n).}$
2. Posons $Z = \dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}$. z est solution de (E_n)
   $\Leftrightarrow (1-\mathrm{i}z)^n(1-\mathrm{i}\sqrt{3}) = (1+\mathrm{i}z)^n(1+\mathrm{i}\sqrt{3}) \Leftrightarrow \dfrac{(1-\mathrm{i}z)^n}{(1+\mathrm{i}z)^n} = \dfrac{1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{1-\mathrm{i}\sqrt{3}}, z \neq -\dfrac{1}{\mathrm{i}} = \mathrm{i} \Leftrightarrow Z^n = \dfrac{2\mathrm{e}^{\frac{\mathrm{i}\pi}{3}}}{2\mathrm{e}^{\frac{-\mathrm{i}\pi}{3}}} \Leftrightarrow \boxed{Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}, z \neq \mathrm{i}.}$
3. $e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$ a n racines n ièmes distinctes qui sont $\boxed{\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3n}+\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}, k \in [\![0, n-1]\!]}$
4. $\dfrac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z} = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow 1-\mathrm{i}z = (1+\mathrm{i}z)e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow z\left(-\mathrm{i}-\mathrm{i}e^{\mathrm{i}\theta}\right) = e^{\mathrm{i}\theta}-1 \Leftrightarrow z = \dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-1}{-\mathrm{i}\left(1+e^{\mathrm{i}\theta}\right)}$ pour $e^{\mathrm{i}\theta} \neq -1$ i.e $\theta \neq \pi\,[2\pi]$
   $z = \mathrm{i}\dfrac{e^{\mathrm{i}\theta}-1}{1+e^{\mathrm{i}\theta}} = \mathrm{i}\dfrac{2\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{\theta}{2}\right)}{2\cos\left(\dfrac{\theta}{2}\right)} = -\tan\left(\dfrac{\theta}{2}\right)$
   Et pour $\theta = \pi\,[2\pi], 1-\mathrm{i}z = -1-\mathrm{i}z \Leftrightarrow 2 = 0$ ce qui est impossible.
5. $(E_n) \Leftrightarrow Z^n = e^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} \Leftrightarrow Z = e^{\mathrm{i}\theta}$ avec $\theta = \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n}, k \in [\![0, n-1]\!]$
   Et $\theta = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow \dfrac{2\pi}{3n} + \dfrac{2k\pi}{n} = \pi\,[2\pi] \Leftrightarrow 2\left(\dfrac{1}{3}+k\right) = n\,[2n] \Leftrightarrow k = \dfrac{n}{2} - \dfrac{1}{3}\,[n]$ ce qui est impossible avec $k \in [\![0, n-1]\!]$
   Les solutions de (E_n) sont alors $\boxed{z = -\tan\left(\dfrac{\pi}{3n} + \dfrac{k\pi}{n}\right), k \in [\![0, n-1]\!]}$

Exercice 2 Soit φ la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par

$$\varphi(z) = \frac{z-1-\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}-\bar{z}}$$

1. $1-\mathrm{i}-\bar{z} = \Leftrightarrow \bar{z} = -\mathrm{i} \Leftrightarrow z = 1++\mathrm{i}$ donc $\boxed{D_\varphi = \mathbb{C} \setminus \{1+\mathrm{i}\}}$
2. $|\varphi(z)| == \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|1-\mathrm{i}-\bar{z}|} = \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|-1||-1+\mathrm{i}+\bar{z}|} = \dfrac{|z-1-\mathrm{i}|}{|z-\overline{1}-\mathrm{i}|} = 1$ pour tout $z \in\in D_\varphi$, car un nombre complexe et son conjugué ont même module
   $\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas surjective}}$ puisque tout nombre complexe de module différent de 1 ne peut avoir d'antécédent par φ.

3. $\varphi(z) = 1 \Leftrightarrow z - 1 - \mathrm{i} = 1 - \mathrm{i} - \bar{z} \Leftrightarrow z + \bar{z} = 2 \Leftrightarrow z = 1 + \mathrm{i}y, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car $z \neq 1 + \mathrm{i}$.
   $\boxed{\varphi \text{ n'est alors pas injective}}$ car 1 a une infinité d'antécédents.

4. $\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z \in D_\varphi ; \varphi(z) \in \mathbb{R}\}$.
   Or $|\varphi(z)| = 1$ pour tout $z \in D_\varphi$ donc $z \in \varphi^{-1}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \varphi(z) = 1$ ou $\varphi(z) = -1$.
   la première équation a été résolue à la question précédente, il reste à résoudre la seconde qui équivaut à $z - \bar{z} = 2\mathrm{i} \Leftrightarrow z = x + \mathrm{i}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$ car $z \neq 1 + \mathrm{i}$
   $\boxed{\varphi^{-1}(\mathbb{R}) = \{z = x + \mathrm{i}, x \in \mathbb{R} \setminus \{1\} \text{ ou } z = 1 + \mathrm{i}y, y \in \mathbb{R} \setminus \{1\}\}}$

   Remarque : si on résout l'équation $\varphi(z) = a, a \in \mathbb{R}$, on trouve comme unique solution $z = 1 + \mathrm{i}$ pour $a \neq 1$ ou -1 ce qui est impossible, donc on se ramène à $a = 1$ ou $a = -1$.

5. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. On évalue dans cette question $\varphi^{-1}\left(\left\{e^{\mathrm{i}\theta}\right\}\right)$.

   a) $\arg(\varphi(z)) = \arg(z - 1 - \mathrm{i}) - \arg(1 - \mathrm{i} - \bar{z})\,[2\pi]$
   $\underset{\arg(\bar{z}) = -\arg(z)}{=} \arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \arg(1 + \mathrm{i} + z)\,[2\pi]$
   $\underset{\arg(-z) = \pi + \arg(z)}{=} \arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \pi + \arg(-1 - \mathrm{i} + z)\,[2\pi] = 2\arg(z - 1 - \mathrm{i}) + \pi\,[2\pi]$.

   b) $\varphi(z) = e^{\mathrm{i}\theta} \Leftrightarrow \arg(z - 1 - \mathrm{i}) = \dfrac{\theta - \pi}{2}\,[\pi]$ car $|\varphi(z)| = 1$

   c) Soient A le point d'affixe $1 + \mathrm{i}$.
   L'ensemble des points d'affixes les antécédents par φ de $e^{\mathrm{i}\theta}$ est la droite passant par A formant un angle de $\dfrac{\theta - \pi}{2}$ avec l'horizontale, privée du point A.
   Pour $\theta = \dfrac{\pi}{2}$, cet angle mesure $-\dfrac{\pi}{4}$.

6. D'après la question précédente, $\forall \theta \in \mathbb{R}, e^{\mathrm{i}\theta}$ a au moins un antécédent par φ et d'après la question 2. $\varphi(\mathbb{C}) \subset \mathbb{U}$ donc,
   $\boxed{\text{pour que } \varphi : D_\varphi \to E \text{ soit surjective il suffit de choisir } E = \mathbb{U}}$