École Ouverte 19/10/2026 – Corrections

1 Fonctions

Exercice 1 $a'(x) = 6(4x-1)\left(2x^2-x-1\right)^5$ sur $\mathbb{R}$ $\quad b'(x) = 2 + \dfrac{9}{(x-2)^4}$ sur $\mathbb{R}\setminus\{2\}$

$c'(x) = \text{Arccos}\ (1-x) + \dfrac{x}{\sqrt{2x-x^2}}$ sur $]0,2[$. À noter que c est encore dérivable en 0 avec $c'(0) = 0$ en étudiant le taux d'accroissement :

$$\frac{c(x)-c(0)}{x} = \text{Arccos}\,(1-x) \xrightarrow{x\to 0} \text{Arccos}(1) = 0$$

.

$d'(x) = \dfrac{-1}{(1+x)^2}\sqrt{\dfrac{1+x}{1-x}}$ sur $]-1,1[$ $\quad e'(x) = \dfrac{-1}{2x\sqrt{1-\ln(x)}}$ sur $]0,\mathrm{e}[$

$f'(x) = 3x^2(1-x)e^{-3x+2}$ sur $\mathbb{R}$ $\quad g'(x) = \dfrac{2x+3}{x^2+3x}$ sur $]-\infty,-3[\cup]0,+\infty[$

$h'(x) = \left(\ln(\text{ch}\,x) + x\dfrac{\text{sh}\,x}{\text{ch}\,x}\right)(\text{ch}\,x)^x$ sur $\mathbb{R}$ $\quad k'(x) = \dfrac{-1}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}^*$

Exercice 2

(a) $\ln\left(2x^2+1\right) - 1 = \ln(2x+1) \Leftrightarrow 2x^2+1 = 2\mathrm{e}x + \mathrm{e}$ et $x > -\dfrac{1}{2}$

$\Delta = 4(\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2) > 0, x = \dfrac{\mathrm{e}\pm\sqrt{\mathrm{e}^2+2\mathrm{e}-2}}{2} > -\dfrac{1}{2}$

(b) $(\ln x)^2 + 3\ln x - 4 = 0$ et $x > 0$ en posant $X = \ln x$ on obtient $X = 1$ ou $X = -4$ puis $x = \mathrm{e}$ ou $x = \mathrm{e}^{-4}$

(c) $\ln(x) + \ln(x+3) = 2\ln(2)$ et $x > 0 \Leftrightarrow x^2+3x-4 = 0$ et $x > 0$ donc l'unique solution est $x = 1$

(d) $\ln(x+1) + \ln(x-3) = 2\ln(x-2)$ et $x > 3 \Leftrightarrow x = \dfrac{7}{2}$

(e) $e^{2x} + e^x - 2 = 0$ en posant $X = \mathrm{e}^x$ on trouve $X = 1$ ou $X = -2$ (impossible) donc la seule solution est $x = 0$

(f) $2e^x = e^{x^2} \Leftrightarrow \ln 2 + x = x^2, \Delta = 1 + 4\ln 2, x = \dfrac{1\pm\sqrt{1+4\ln 2}}{2}$

(g) $e^x - 4e^{-x} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{2x} - 4 = \mathrm{e}^x$ et en posant $X = \mathrm{e}^x$ on obtient $X = \dfrac{1\pm\sqrt{17}}{2}$ et l'unique solution est $x = \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{17}}{2}\right)$

(h) $\dfrac{\ln(x)}{\ln(a)} = \dfrac{\ln(a)}{\ln(x)}$, $a > 0$, $a \neq, x > 0, x \neq 1 \Leftrightarrow \ln^2 x = \ln^2 a \Leftrightarrow \ln x = \pm \ln a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = \dfrac{1}{a}$
ces solutions étant strictement positives et différentes de 1.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{\ln 3} - \dfrac{\ln(x)}{\ln 2} = 1$ et $x > 0 \Leftrightarrow \ln x = \dfrac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3} \Leftrightarrow x = \mathrm{e}^{\frac{\ln 2 \ln 3}{\ln 2 - \ln 3}} > 0$

Exercice 3 Résoudre les inéquations suivantes :

(a) $e^{-2x} \geq \dfrac{1}{2}$ $S =]-\infty, \dfrac{\ln 2}{2}]$

(b) $e^x < \dfrac{1}{4}e^{x^2} \Leftrightarrow x^2 - x - \ln 4 > 0$ et $S =]-\infty, \dfrac{1-\sqrt{1+4\ln 4}}{2}[\cup]\dfrac{1+\sqrt{1+4\ln 4}}{2}, +\infty[$

(c) $\ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right) \geq 1$ pour $x \in]-\infty, -1[\cap]1, +\infty[, S = [\dfrac{2}{1-\mathrm{e}}, -1[$

(d) $\dfrac{e^x+1}{e^x-1} \leq 2$ pour $x \neq 0, S =]-\infty, 0[\cup[\ln 3, +\infty[$

(e) $e^x \geq e^{2x} - 1, S =]-\infty, \ln\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)]$

(f) $\ln(e^x - e^{-x}) > 2$ pour $x > 0, S =]\ln\left(\dfrac{\mathrm{e}^2 + \sqrt{\mathrm{e}^4+4}}{2}\right), +\infty[$

Exercice 4

1. $\sqrt{e^{2x} - 3e^x + 2} = e^x - 2 \Leftrightarrow x = \ln 2$
2. $e^x - e^{-x} = 2m \Leftrightarrow x = \ln\left(m + \sqrt{m^2+1}\right), \forall\, m \in \mathbb{R}$

Exercice 5 Déterminer les limites suivantes :

(a) $\ln(x+1) - \ln(2x-3) = \ln\left(\dfrac{x+1}{2x-3}\right)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{2x-3} = \dfrac{1}{2}$ comme limite d'une fraction rationnelle, donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} (\ln(x+1) - \ln(2x-3)) = -\ln 2}$ par composition.

(b) $\sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = \sqrt{x}\ln x + \sqrt{x}\ln(x+1)$
Or $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln x = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln(x+1) = 0$ par produit donc
$\boxed{\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}\ln\left(\dfrac{x}{x+1}\right) = 0}$ par somme.

(c) $x\sqrt{x}\,(e^{-x})^3 = x^{\frac{3}{2}}\mathrm{e}^{-3x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} x\sqrt{x}\,(e^{-x})^3 = 0}$ par croissance comparée.

(d) $e^x - 3x^2 - 1 = x^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 3 - \dfrac{1}{x^2}\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(e^x - 3x^2 - 1\right) = +\infty}$ par croissance comparée et produit.

(e) $\ln(x) - x^2 = x^2\left(\dfrac{\ln x}{x^2} - 1\right)$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\ln(x) - x^2\right) = -\infty}$ par croissance comparée et produit.

(f) $\dfrac{\ln(x+1)}{x} = \dfrac{\ln(x+1)}{x+1}\dfrac{x+1}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$ par croissance comparée, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0}$ par produit.

(g) $xe^{-x^2} = \dfrac{1}{x}x^2e^{-x^2}$. Or $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^{-x^2} = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} xe^{-x^2} = 0}$ par produit.

(h) $\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1} = \dfrac{x+2}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{1}{X}+2}{1+X}$ en posant $X = \dfrac{1}{x} \longrightarrow +\infty$ lorsque $x \longrightarrow 0_+$

$\dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = \left(\dfrac{1}{X}+2\right)\dfrac{\mathrm{e}^X}{X}\dfrac{X}{X+1}$ avec $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{1}{X}+2 = 2$, $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^X}{X} = +\infty$ par croissance comparée et $\lim\limits_{X\to+\infty} \dfrac{X}{X+1} = 1$ comme limite d'une fraction rationnelle.

Finalement $\boxed{\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{x^3+2x^2}{x^2+1}e^{\frac{1}{x}} = +\infty}$ par produit.

(i) $\dfrac{\ln(x)}{e^x} = \dfrac{\ln(x)}{x}\dfrac{x}{e^x}$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{e^x} = 0}$ par croissance comparée et produit.

Exercice 6 Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x^2\ln x$.

1. On considère la fonction d définie sur $]0,+\infty[$ par $d(x) = x^2\ln x - x + 1$.

   (a) d est 2 fois dérivable sur $]0,+\infty[$ et $d'(x) = 2x\ln x + x - 1$, $d''(x) = 2\ln x + 3$, pour tout $x \in]0,+\infty[$.

   (b) $d''(x) > 0 \Leftrightarrow \ln x > -\dfrac{3}{2} \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$

x	0		$\mathrm{e}^{-\frac{3}{2}}$		1		$+\infty$
$d''(x)$	‖	$-$	0	$+$		$+$	
$d'(x)$	‖	-1	↘		0	↗	

   (c) $\lim\limits_{x\to0} x\ln x = 0$ par croissance comparée donc $\lim\limits_{x\to0} d'(x) = -1$ et $d'(1) = 0$. D'après le tableau de variation ci-dessus, on en déduit que $d'(x) \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$.

   On peut aussi remarquer que $2x\ln x \leq 0$ et $x - 1 \leq 0$ pour tout $x \in]0,1]$ et conclure par somme.

(d) On déduit également des variations de d' et de $d'(1) = 0$ que $d'(x) > 0$ pour tout $x \in]1, +\infty[$

x	0		1		$+\infty$
$d'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$d(x)$	‖	↘	0	↗	

On en déduit que $d(x) \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$.

2. $f(1) = 0$ et $f'(x) = 2x \ln x + x$ donc $f'(1) = 1$

   $y = f'(1)(x-1) + f(1) = -x + 1$

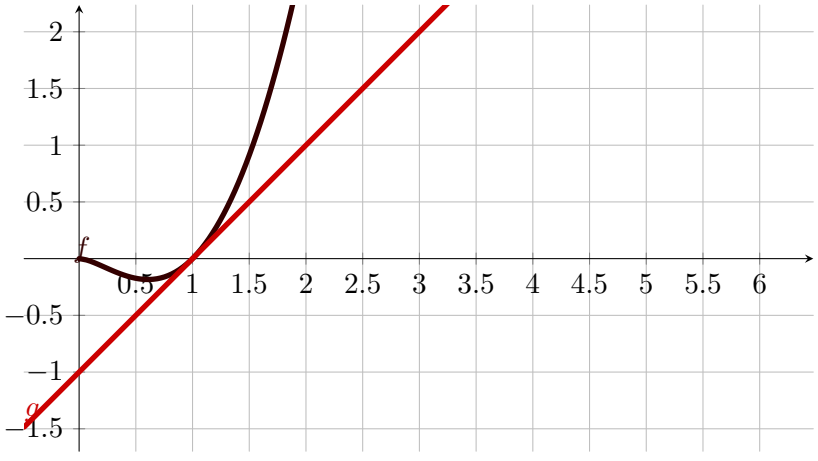
   Une équation de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est $y = x - 1$

3. $f(x) - (x-1) = d(x) \geqslant 0$ sur $]0, +\infty[$ donc la courbe de f est au dessus de cette tangente sur $]0, +\infty[$.

4. $f'(x) = 2x \ln x + x = x(2 \ln x + 1)$ est du signe de $2 \ln x + 1$ car $x > 0$

   $2 \ln x + 1 > 0 \Leftrightarrow x > \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$ et on en déduit les variations de f sur $]0, +\infty[$.

   De plus $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 0$ par croissance comparée et $\lim\limits_{x to +\infty} f(x) = +\infty$ par produit



Exercice 7 On considère la fonction f définie par :

$$f(x) = \ln\left(x + \sqrt{1 + x^2}\right)$$

On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

   $\sqrt{1+x^2} > \sqrt{x^2}$, or $\sqrt{x^2} = |x|$ et $|x| \geq -x$ donc $\sqrt{1+x^2} > -x$ donc $x + \sqrt{1+x^2} > 0$.

   (b) En déduire l'ensemble de définition de f.

   Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

   (c) $f(x) = 2 \Leftrightarrow \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) = 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{1+x^2} = e^2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = \left(e^2 - x\right)^2$ car $1 + x^2 \geq 0$

   donc $f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + x^2 = e^4 - 2e^2x + x^2 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^4 - 1}{2e^2}$. $\mathcal{S} = \left\{\dfrac{e^4 - 1}{2e^2}\right\}$.

   Or $e \approx 2,7$, donc $\dfrac{e^2}{2} \approx \dfrac{7,29}{2}$, et $\dfrac{1}{2e^2} < 0,1$, donc $\dfrac{e^4 - 1}{2e^2} \approx 3,6$ au dixième près.

2. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) + f(-x) = 0$.

   $f(x) + f(-x) = \ln\left[\left(x + \sqrt{1+x^2}\right)\left(-x + \sqrt{1+x^2}\right)\right] = \ln\left(1 + x^2 - x^2\right) = \ln 1 = 0$.

   (b) Ainsi $\forall x \in \mathbb{R}$, $-x \in \mathbb{R}$ et $f(-x) = -f(x)$, donc f est impaire.

3. (a) Calculer la dérivée de f, et en donner une expression simple.

   $f'(x) = \dfrac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{1+x^2}+x}{\sqrt{1+x^2}}}{x + \sqrt{1+x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

   (b) Étudier les variations de f.

   $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x) > 0$ donc f est une fonction strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

   (c) Déterminer l'équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

   $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ donc l'équation de T est : $y = x$.

4. (a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$.

   $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = \dfrac{e^{f(x)} - e^{-f(x)}}{2} = \dfrac{e^{f(x)} - e^{f(-x)}}{2} = \dfrac{1}{2}\left(x + \sqrt{1+x^2} - (-x) - \sqrt{1+x^2}\right) = x$

   (b) Que peut-on dire des fonctions f et sinus hyperbolique ?

   On a $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ et comme f est impaire, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$, donc $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

   Comme f est strictement croissante, f est bijective de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$.

   Or pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\operatorname{sh}\left[f(x)\right] = x$, donc f et sinus hyperbolique sont des fonctions réciproques l'une de l'autre.

   (c) En déduire très facilement la solution de l'équation $\operatorname{sh} x = 2$.

   $\operatorname{sh} x = 2 \Leftrightarrow x = f(2)$ donc $\mathcal{S} = \left\{\ln\left(2 + \sqrt{5}\right)\right\}$.

Exercice 8

1. $\psi(x) = \operatorname{sh}^2(x) + \operatorname{sh}(x) + 1 = X^2 + X + 1$ où $X = \operatorname{sh} x$. Or le trinôme n'a pas de racine réelle et est donc à valeurs > 0 vu le coefficient de X^2.

2. On considère maintenant la fonction $h :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par $h(x) = e^{\mathrm{sh}\,(x)} - x - 1$.

   h est deux fois dérivable sur $]-1,1[$ et

   $h'(x) = \mathrm{ch}\,(x)\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,x} - 1$ et

   $h''(x) = \mathrm{sh}\,(x)\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,x} + \mathrm{ch}^{\,2}(x)\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,x} = (\mathrm{sh}\,x + \mathrm{ch}^{\,2}x)\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,x} = \psi(x)e^{\mathrm{sh}\,(x)}$ car $\mathrm{ch}^{\,2}x = \mathrm{sh}^{\,2}x + 1$ pour tout x.

3.

x	-1		0		1
$h''(x)$		$+$		$+$	
$h'(x)$		↗	0	↗	

x	-1		0		1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		↘	0	↗	

   On en déduit que h est positive sur $[-1,1]$.

4. Pour tout $x \in [0,1[$ $1 + x \leqslant e^{\mathrm{sh}\,(x)}$ car $h(x) \geqslant 0$ sur $[0,1[$

   De plus, $h(-x) = \mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,(-x)} + x - 1 \geqslant 0$ sur $[0,1[$. Or $\mathrm{sh}\,(-x) = -\mathrm{sh}\,(x)$ pour tout x, d'où $\mathrm{e}^{-\mathrm{sh}\,(x)} \geqslant 1 - x > 0$ pour tout $x \in [0,1[$ puis $\mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,(x)} \leqslant \dfrac{1}{1-x}$ pour tout $x \in [0,1[$, car la fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

5. Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Dans l'encadrement précédent, on remplace x par $\dfrac{1}{k} \in [0,1[$ pour tout entier naturel k supérieur ou égal à 2 : $0 < 1 + \dfrac{1}{k} \leqslant \mathrm{e}^{\mathrm{sh}\,\left(\frac{1}{k}\right)} \leqslant \dfrac{1}{1-\frac{1}{k}}$

   On en déduit que $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \mathrm{sh}\,\left(\dfrac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{k}}\right)$ car la fonction ln est croissante sur $\mathbb{R}_+^*$

   Or $\ln\left(1+\dfrac{1}{k}\right) = \ln\left(\dfrac{k+1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln(k)$

   et de même, $\ln\left(\dfrac{1}{1-\frac{1}{k}}\right) = \ln(k) - \ln(k-1)$

En sommant cet encadrement pour k allant de n à pn et en remarquant que les sommes de droite et de gauche sont télescopiques (sommes de différences successives), on obtient, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2 ,

$\ln(np+1) - \ln n \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln(np) - \ln(n-1)$, i.e

$$\ln\left(\frac{np+1}{n}\right) \leqslant \sum_{k=n}^{pn} \text{sh}\left(\frac{1}{k}\right) \leqslant \ln\left(\frac{pn}{n-1}\right)$$

6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{np+1}{n} = p$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{np}{n-1} = p$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \ln p$ par encadrement.

2 Nombres complexes

Exercice 1

1. $a = \frac{(2-\text{i})^2}{1+2\text{i}} = \frac{(4-4\text{i}-1)(1-2\text{i}}{5} = -1-2\text{i}$

   $b = \frac{5+\text{i}}{3-\text{i}} - \frac{3+\text{i}}{5-\text{i}} = \frac{(5+\text{i})(3+\text{i})}{10} - \frac{(5+\text{i})(3+\text{i})}{26}$

   $b = \frac{13(5+\text{i})(3+\text{i}) - 5(5+\text{i})(3+\text{i})}{130} = \frac{8}{65}(7+4\text{i})$

   $c_n = \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \text{i}\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)^{6n} = \cos(n\pi) + \text{i}\sin(n\pi) = (-1)^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

   car $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $\sin(n\pi) = 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

2. Déterminer les formes exponentielles des complexes suivants (où x est un paramètre réel) :

   $a = \frac{3}{1+\text{i}\sqrt{3}} = \frac{3}{2(1/2+\text{i}\sqrt{3}/2)} = \frac{3}{2\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{3}}} = \frac{3}{2}\,\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{3}}$

   $b = \left(\frac{1+\text{i}}{1-\text{i}}\right)^9 = \left(\frac{\sqrt{2}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{4}}}{\sqrt{2}\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{4}}}\right)^9 = \text{e}^{\frac{9\text{i}\pi}{2}} = \text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}}$

   $c = -a = \text{e}^{\text{i}\pi} \times \frac{3}{2}\,\text{e}^{-\frac{\text{i}\pi}{3}} = \frac{3}{2}\,\text{e}^{\frac{2\text{i}\pi}{3}}$

   $d = \frac{-3b}{ia^2} = \frac{3\text{e}^{\text{i}\pi}\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}}}{\text{e}^{\frac{\text{i}\pi}{2}} \times \frac{9}{4}\,\text{e}^{-\frac{2\text{i}\pi}{3}}} = \frac{4}{3}\text{e}^{\frac{5\text{i}\pi}{3}}$

   $\text{e} = \sin(x) - \text{i}\cos(x) = \text{e}^{\text{i}\left(x-\frac{\text{i}\pi}{2}\right)}$

   $f = \frac{1-\text{i}\tan(x)}{1+\text{i}\tan(x)} = \frac{\cos(x)-\text{i}\sin(x)}{\cos(x)+\text{i}\sin(x)} = \frac{\text{e}^{-\text{i}x}}{\text{e}^{\text{i}x}} = \text{e}^{-2\text{i}x}$ pour tout $x \neq \frac{\pi}{2}\,[\pi]$.

3. $P(z) = z^3 + 3z^2 + 3z + 3 - 2\text{i}$.

   a)$P(\text{i}) = 0$.

   b)$P(z) = P(z) - P(\text{i}) = z^3 - \text{i}^3 + 3(z^2 - \text{i}^2) + 3(z - \text{i})$

   $P(z) = (z-\text{i})(z^2 + \text{i}z + \text{i}^2) + 3(z-\text{i})(z+\text{i}) + 3(z-\text{i})$

$P(z) = (z - \mathrm{i})(z^2 + \mathrm{i}z - 1 + 3z + 3\mathrm{i} + 3) = (z - \mathrm{i})(z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i})$

c) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_1 = \mathrm{i}$ ou $z^2 + (3 + \mathrm{i})z + 2 + 3\mathrm{i} = 0$

$\Delta = (3 + \mathrm{i})^2 - 4(2 + 3\mathrm{i}) = 9 + 6\mathrm{i} - 1 - 8 - 12\mathrm{i} = -6\mathrm{i} = 6\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{2}}$

$\delta = \sqrt{6}\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{4}} = \sqrt{3} - \mathrm{i}\sqrt{3}$

$z_2 = \dfrac{-3 + \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 - \sqrt{3})}{2}$ et $z_3 = \dfrac{-3 - \sqrt{3} + \mathrm{i}(-1 + \sqrt{3})}{2}$

Exercice 2 Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $a = -1 + i$, $b = -1 - i$, $c = 2i$ et $d = 2 - 2i$.

1.
2. $\dfrac{c - a}{d - a} = \dfrac{2i - (-1 + i)}{2 - 2i - (-1 + i)} = \dfrac{1 + i}{3 - 3i} = \dfrac{(1 + i)(3 + 3i)}{18} = \dfrac{i}{3}$ imaginaire pur donc le triangle ACD est rectangle en A.
3. On considère le point I d'affixe 1. On a $AI = |-1 + i - 1| = |-2 + i| = \sqrt{5}$,

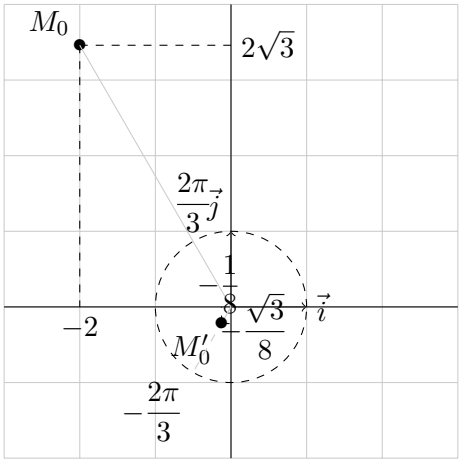
   $BI = |-1 - i - 1| = |-2 - i| = \sqrt{5}$, $CI = |2i - 1| = \sqrt{5}$, $AI = |2 - 2i - 1| = |1 - 2i| = \sqrt{5}$.

   Donc les points A, B, C et D sont sur un même cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

Exercice 3

1. On considère le nombre complexe $z_0 = -2 + 2\sqrt{3}i$.

   (a) Placer l'image M_0 de z_0 dans le plan complexe (on prendra 2cm comme unité).



   (b) $z_0 = 4e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

   (c) $\dfrac{1}{z_0} = \dfrac{1}{4}e^{-i\frac{2\pi}{3}} = \dfrac{1}{4}\left(-\dfrac{1}{2} - i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\dfrac{1}{8} - i\dfrac{\sqrt{3}}{8}$

   (d)

2. Pour $x \neq 0$

(a) $\dfrac{1}{z} = \dfrac{1}{x+iy} = \dfrac{x-iy}{x^2+y^2} = \dfrac{x}{x^2+y^2} - i\dfrac{y}{x^2+y^2}$.

(b) $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow x = \dfrac{x}{x^2+y^2} \Leftrightarrow x^2+y^2 = 1$ car $x \neq 0$.

donc $Re(z) = Re\left(\dfrac{1}{z}\right) \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$ car $|z|$ est un nombre positif.

3. On considère trois nombres complexes a, b, c tous trois de module égal à 1.

(a) Démontrer que $\dfrac{1}{a} = \overline{a}$.

$a\overline{a} = |a|^2 = 1$ donc $\overline{a} = \dfrac{1}{a}$.

(b) Démontrer que $ab + ac + bc = abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big)$.

$abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big) = a\overline{a}bc + ab\overline{b}c + abc\overline{c} = bc + ac + ab$ car $a\overline{a} = b\overline{b} = c\overline{c} = 1$.

(c) En déduire que $|ab + ac + bc| = |a + b + c|$.

Par Qb) : $|ab + ac + bc| = \big|abc\big(\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}\big)\big| = |a|.|b|.|c|.\big|\overline{a + b + c}\big| = |a + b + c|$.

Exercice 4 On considère l'équation $z^2 - 2(\sin t)z + 1 = 0$, où t désigne un nombre réel.

1. Résoudre l'équation dans le cas particulier où $t = \dfrac{\pi}{4}$.

Pour $t = \dfrac{\pi}{4}$, l'équation s'écrit $z^2 - \sqrt{2}z + 1 = 0$.

$\Delta = -2 = \big(i\sqrt{2}\big)^2$ donc les solutions de l'équation sont :

$z_1 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} - i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{-i\frac{\pi}{4}}$ et $z_2 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} + i\dfrac{\sqrt{2}}{2} = e^{i\frac{\pi}{4}}$.

2. Résoudre l'équation pour une valeur quelconque générale de t.

$\Delta = (2\sin t)^2 - 4 = 4\left(\sin^2 t - 1\right) = -4\cos^2 t = (2i\cos t)^2$,

donc $z_1 = \dfrac{2\sin t - 2i\cos t}{2} = \sin t - i\cos t = e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$,

et $z_2 = \dfrac{2\sin t + 2i\cos t}{2} = \sin t + i\cos t = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$.

3. Résoudre l'équation $z^4 - 2(\sin t)z^2 + 1 = 0$.

D'après ce qui précède, on a $z^2 = e^{i\left(t - \frac{\pi}{2}\right)}$ ou $z^2 = e^{i\left(\frac{\pi}{2} - t\right)}$.

Donc $\mathcal{S} = \left\{e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, -e^{i\left(\frac{t}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}, e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}, -e^{i\left(\frac{\pi}{4} - \frac{t}{2}\right)}\right\}$

Exercice 5 On cherche à résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^3 = \overline{z}$ $\quad (E)$

1. $\cos(4\theta) = 1 \Leftrightarrow 4\theta = 0 + 2k\pi \Leftrightarrow \theta = k \times \dfrac{\pi}{2}$. $\quad \mathcal{S} = \left\{k \times \dfrac{\pi}{2},\ k \in \mathbb{Z}\right\}$.

2. $x^3 = x \Leftrightarrow x(x^2 - 1) = 0 \leftrightarrow x(x-1)(x+1) = 0$. $\quad \mathcal{S} = \{-1, 0, 1\}$.

3. On considère une solution $\alpha \in \mathbb{C}$ de l'équation (E).

On a $\alpha^3 = \overline{\alpha}$ donc $\left|\alpha^3\right| = |\overline{\alpha}|$ donc $|\alpha|^3 = |\alpha|$, donc, d'après la question précédente, $|\alpha|$ est égal à -1 (exclu), ou 0 ou 1.

4. $z = 0$ est clairement une solution de (E). Toute autre solution serait nécessairement de module 1 et pourrait donc s'écrire $z = e^{i\theta}$.

   Alors $z^3 = \overline{z} \Leftrightarrow e^{3i\theta} = e^{-i\theta} \Leftrightarrow e^{4i\theta} = 1 \Leftrightarrow \cos(4\theta) = 1$.

   D'après 1., les solutions de (E) sont finalement 0, $e^0 = 1$, $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$, $e^{2i\frac{\pi}{2}} = -1$, et $e^{3i\frac{\pi}{2}} = -i$.

Exercice 6 Posons $A = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$ et $B = \sum_{k=1}^{4} \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right)$.

1. $A + B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) + \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} 1 = 4$
2. $A - B = \sum_{k=1}^{4} \cos^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) - \sin^2\left(\frac{k\pi}{9}\right) = \sum_{k=1}^{4} \cos\left(\frac{2k\pi}{9}\right) = \cos\frac{2\pi}{9} + \cos\frac{4\pi}{9} + \cos\frac{6\pi}{9} + \cos\frac{8\pi}{9}$
   $= 2\cos\frac{3\pi}{9}\cos\frac{\pi}{9} + \cos\frac{2\pi}{3} + \cos\frac{8\pi}{9} = \cos\frac{\pi}{9} - \frac{1}{2} + \cos\frac{8\pi}{9} = -\frac{1}{2}$, car $\pi - \frac{\pi}{9} = \frac{8\pi}{9}$.
3. En déduire les valeurs exactes de A et B.
   $$\begin{cases} A + B = 4 \\ A - B = -\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A = \frac{7}{4} \\ B = \frac{9}{4} \end{cases}$$

Exercice 7 Soit a un complexe de module $|a| < 1$.

1. Démontrer que, pour tout nombre complexe z tel que $1 - \bar{a}z \neq 0$,

$$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

   $$1 - \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 = 1 - \frac{(z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z}) - (z-a)(\bar{z}-\bar{a})}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})}$$
   $$= \frac{1 + \bar{a}za\bar{z} - z\bar{z} - a\bar{a}}{(1-\bar{a}z)(1-a\bar{z})} = \frac{(1-a\bar{a})(1-z\bar{z})}{|1-\bar{a}z|^2} = \frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2}$$

2. Déterminer les nombres complexes z vérifiant $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$.

   On a $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1 \Leftrightarrow \left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right|^2 \leq 1$

   D'après la question précédente, c'est équivalent à $\frac{\left(1-|a|^2\right)\left(1-|z|^2\right)}{|1-\bar{a}z|^2} \geq 0$

   or par hypothèse, $1 - |a|^2 \geq 0$, et bien sûr $|1 - \bar{a}z|^2 \geq 0$

   donc c'est encore équivalent à : $1 - |z|^2 \geq 0 \Leftrightarrow |z|^2 \leq 1 \Leftrightarrow |z| \leq 1$.

   L'ensemble des nombres complexes vérifiant la relation $\left|\frac{z-a}{1-\bar{a}z}\right| \leq 1$ est l'ensemble des nombres complexes de module inférieur ou égal à 1.

Exercice 8

1. Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$. $\boxed{\cos^2(k\theta) = \dfrac{1+\cos(2k\theta)}{2}}$.

2. Soient $\theta \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

   (a) $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} = 1 \iff 2\theta = 2k\pi,\ k\in\mathbb{Z} \iff \theta = k\pi,\ k\in\mathbb{Z}$. Donc $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta} \neq 1$ et
   $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k = \frac{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(n+1)\theta}}{1-\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta}}$.
   En factorisant par l'angle de moitié, on obtient :
   $S_n = \dfrac{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}{\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta} - \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}} \underset{\text{Euler}}{=} \dfrac{-2\mathrm{i}\sin((n+1)\theta)\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}{-2\mathrm{i}\sin(\theta)}$.
   Donc $\boxed{S_n = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)}\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}$, avec $\lambda = \dfrac{\sin((n+1)\theta)}{\sin(\theta)} \in \mathbb{R}$ et $\alpha = n\theta \in \mathbb{R}$.

   (b) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \cos^2(k\theta) \underset{1.}{=} \sum_{k=0}^{n} \frac{1+\cos(2k\theta)}{2} \underset{\text{linéarité}}{=} \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta)$.
   $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$ et $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos(2k\theta) \underset{\text{Moivre}}{=} \mathrm{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}(\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\theta})^k\right) \underset{2.(a)}{=} \dfrac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{\sin(\theta)}$.
   Donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\cos^2(k\theta) = \frac{n+1}{2} + \frac{\sin((n+1)\theta)\cos(n\theta)}{2\sin(\theta)}}$.

3. Si $\theta = \pi/9$ et $n = 4$, on obtient :

$$1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2} + \frac{\sin(5\pi/9)\cos(4\pi/9)}{2\sin(\pi/9)}.$$

$$\sin\left(\frac{5\pi}{9}\right)\cos\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{5\pi}{9}+\frac{4\pi}{9}\right)+\sin\left(\frac{5\pi}{9}-\frac{4\pi}{9}\right)\right] = \frac{1}{2}\left[\sin(\pi)+\sin\left(\frac{\pi}{9}\right)\right].$$

Comme $\sin(\pi) = 0$, on a :

$$1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{5}{2}+\frac{\sin(\pi/9)}{4\sin(\pi/9)} = \frac{5}{2}+\frac{1}{4}.$$

Donc, $\boxed{1+\cos^2\left(\frac{\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{2\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{3\pi}{9}\right)+\cos^2\left(\frac{4\pi}{9}\right) = \frac{11}{4}}$.

Exercice 9 Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$, on pose $f(z) = \dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$

1. $f(2-5\mathrm{i}) = \dfrac{2-5\mathrm{i}-4+3\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} = \dfrac{-2-2\mathrm{i}}{-4\mathrm{i}} = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2\mathrm{i}} = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\mathrm{i}\frac{\sqrt{2}}{2}\right)}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}$.
   Donc $\boxed{f(2-5\mathrm{i}) = \dfrac{1-\mathrm{i}}{2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi/4}}$.

2. Soit $\omega \in \mathbb{C}$ fixé. Pour $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$, on a :

$$f(z) = \omega \iff \frac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = \omega \iff z-4+3\mathrm{i} = z\omega+(-2+\mathrm{i})\omega \iff z(1-\omega) = 4-3\mathrm{i}+(-2+\mathrm{i})\omega.$$

$\boxed{\text{Si } \omega \neq 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ admet pour unique solution } z_0 = \dfrac{4 - 3\mathrm{i} + (-2+\mathrm{i})\omega}{1-\omega}}$.

$\boxed{\text{Si } \omega = 1, \text{ l'équation } f(z) = \omega \text{ n'admet pas de solution}}$, car

$4 - 3\mathrm{i} + (-2+\mathrm{i})\omega = 2 - 2\mathrm{i} \neq 0$.

3. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$. On a :

$$f(z) = z \iff \frac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}} = z \iff z-4+3\mathrm{i} = z^2+(-2+\mathrm{i})z \iff z^2+(-3+\mathrm{i})z+4-3\mathrm{i} = 0,$$

qui est une équation du second degré de discriminant $\Delta = (-3+\mathrm{i})^2 - 4(4-3\mathrm{i}) = -8+6\mathrm{i}$.

On cherche $\delta = x + \mathrm{i}y$, $x, y \in \mathbb{R}$, tel que

$$\delta^2 = \Delta \iff \begin{cases} x^2 - y^2 &= -8 \\ 2xy &= 6 \\ x^2+y^2 &= \sqrt{(-8)^2+6^2} = 10 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 &= 1 \\ y^2 &= 9 \\ xy &= 3 > 0 \end{cases}.$$

Donc $\delta = 1 + 3\mathrm{i}$ convient et les solutions de l'équation $f(z) = z$ sont

$$\boxed{z_1 = \frac{3-\mathrm{i}-1-3\mathrm{i}}{2} = 1 - 2\mathrm{i} \text{ et } z_2 = \frac{3-\mathrm{i}+1+3\mathrm{i}}{2} = 2+\mathrm{i}},$$

qui sont les affixes des seuls points du plan invariants par f.

4. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$.

Correction géométrique :

$|f(z)| = 1 \iff \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \iff |z-z_A| = |z-z_B| \iff AM = BM$ où $A(4-3\mathrm{i}$, $B(2-\mathrm{i})$ et $M(z)$

Donc $\boxed{E \text{ est la médiatrice du segment } [AB]}$, qui ne contient pas le point B évidemment.

Correction analytique :

$|f(z)| = 1 \iff \dfrac{|z-4+3\mathrm{i}|}{|z-2+\mathrm{i}|} = 1 \iff |z-4+3\mathrm{i}|^2 = |z-2+\mathrm{i}|^2$,

car tout est positif. Donc

$$|f(z)| = 1 \iff (\overline{z}-4-3\mathrm{i})(z-4+3\mathrm{i}) = (\overline{z}-2-\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) \iff -2(z+\overline{z})-2\mathrm{i}(z-\overline{z})+20 = 0$$

En posant $z = x + \mathrm{i}y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,2)\}$, on a $|f(z)| = 1 \iff x - y - 5 = 0$

On vérifie que $z = 2 - \mathrm{i}$ n'est pas solution

Donc $\boxed{E \text{ est la droite d'équation } x-y-5=0}$

5. Soit $z \in \mathbb{C}\backslash\{2-\mathrm{i}\}$.

   Correction géométrique :

   $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \dfrac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff (\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{AM}) = \dfrac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$ où $A(4-3\mathrm{i}$, $B(2-\mathrm{i})$ et $M(z)$

   $\boxed{F \text{ est le cercle de diamètre [AB], privé du point B}}$

   Correction analytique : $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \overline{\left(\dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}\right)} = -\dfrac{z-4+3\mathrm{i}}{z-2+\mathrm{i}}$ donc

   $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff (\overline{z}-4-3\mathrm{i})(z-2+\mathrm{i}) = (4-3\mathrm{i}-z)(\overline{z}-2-\mathrm{i}) \iff 2z\overline{z}-6(z+\overline{z})-4\mathrm{i}(z-\overline{z})+11=0.$

   En posant $z = x+\mathrm{i}y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,2)\}$, on a :

$$\begin{aligned} f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R} &\iff (x^2+y^2)-6x+4y+11=0 \\ &\iff (x-3)^2+(y+2)^2 = 9+4-11=2. \end{aligned}$$

   Or $x=2, y=-1$ est solution de cette équation donc

   $\boxed{F \text{ est le cercle de centre } \Omega\,(3-2\mathrm{i}) \text{ de rayon } r=\sqrt{2}, \text{ privé du point } B \text{ d'affixe } 2-\mathrm{i}}$.

3 Bijections

Exercice 1 Soit f l'application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$.

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $-\mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x - 1 < \mathrm{e}^x + 1$ et en divisant par $\mathrm{e}^x+1>0$ on obtient $-1 < f(x) < 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -1$ par quotient et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 1$ donc f prend toute valeur <1 et toute valeur >-1. Ainsi, $\boxed{J = f(\mathbb{R}) =]-1,1[}$.

2. $y = f(x) \Leftrightarrow y(\mathrm{e}^x+1) = \mathrm{e}^x - 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^x(y-1) = -1-y \Leftrightarrow \mathrm{e}^x = \dfrac{1+y}{1-y}$ et $y \neq 1 \Leftrightarrow x = \ln\left(\dfrac{1+y}{1-y}\right)$ et $y \in]-1,1[$

   Pour tout $y \in]-1,1[$, il existe alors un unique x dans $\mathbb{R}$ tel que $y=f(x)$ donc f est bijective de $\mathbb{R}$ dans $]-1,1[$ et

$$\begin{array}{rccc} f^{-1} :]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right) \end{array}$$

Exercice 2 $z' = f(z) = z + 2\bar{z} \Leftrightarrow x' + \mathrm{i}y' = 3x - \mathrm{i}y$ donc f est bijective de $\mathbb{C}$ dans lui-même avec $z = \dfrac{x'}{3} - \mathrm{i}y'$

Or $\alpha z + \beta\bar{z} = (\alpha+\beta)x + \mathrm{i}(\alpha-\beta)y$ donc $\alpha+\beta = \dfrac{1}{3}$ et $\alpha - \beta = -1$ d'où $\alpha = -\dfrac{1}{3}$ et $\beta = \dfrac{2}{3}$ et

$$\boxed{f^{-1}(z) = -\frac{1}{3}z + \frac{2}{3}\bar{z}}$$

Exercice 3 $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$.

$z' = f(z) \Leftrightarrow z' = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ et $z \neq \mathrm{i} \Leftrightarrow z'(z-\mathrm{i}) = z+\mathrm{i}$ et $z \neq \mathrm{i} \Leftrightarrow z(z'-1) = \mathrm{i} + \mathrm{i}z$ et si $z' \neq 1, z = \dfrac{\mathrm{i}(z'+1)}{z'-1}$ donc l'application f est bijective de $\mathbb{C}\setminus\{i\}$ dans $\mathbb{C}\setminus\{1\}$ et

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : \mathbb{C}\setminus\{1\} & \longrightarrow & \mathbb{C}\setminus\{i\} \\ z & \longmapsto & \dfrac{\mathrm{i}(z+1)}{z-1} \end{array}$$

Exercice 4

1. $\forall x \in \mathbb{R}$, $1 + x^2 > 0$. Donc $\boxed{u \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme quotient de fonctions qui le sont, dont le dénominateur ne s'annule pas. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$u'(x) = \frac{1 \times \sqrt{1+x^2} - x \times \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}}{\sqrt{1+x^2}^2} = \frac{1+x^2-x^2}{\sqrt{1+x^2}} \times \frac{1}{1+x^2}.$$

Comme $\sqrt{1+x^2} = (1+x^2)^{\frac{1}{2}}$, on a bien : $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ u'(x) = \dfrac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}}$.

2. La fonction arcsin est définie sur $[-1,1]$ et dérivable sur $]-1,1[$.

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|x| = \sqrt{x^2} < \sqrt{1+x^2}$ donc $|u(x)| = \dfrac{|x|}{\sqrt{1+x^2}} < 1$ car $\sqrt{1+x^2} > 0$.

Ainsi, $\forall x \in \mathbb{R}$, $-1 < u(x) < 1$. Donc $\boxed{h \text{ est définie et dérivable sur } \mathbb{R}}$, comme composée de fonctions définies et dérivables. De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$h'(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-[u(x)]^2}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{1+x^2}}} = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} \times \frac{1}{\left(\frac{1}{1+x^2}\right)^{\frac{1}{2}}}.$$

Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h'(x) = \frac{1}{1+x^2} = \arctan'(x)}$.

3. On en déduit qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \arctan(x) + C$.

$h(0) = \arcsin(0) = 0 = \arctan(0)$ donc $C = 0$ et $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ h(x) = \arctan(x)}$.

Exercice 5

1. Pour tout réel x, $f(x) = 3^x\left(3^x - 3\right) + 2 = \mathrm{e}^{x\ln(3)}\left(\mathrm{e}^{x\ln(3)} - 3\right) + 2$.

   $\ln(3) > 0$ donc $\boxed{f(x) \underset{x\to-\infty}{\longrightarrow} 2 \text{ et } f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty}$, par opérations sur les limites.

2. Pour tout réel x, $f(x) = \mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\mathrm{e}^{x\ln(3)} + 2$.

   Donc f est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme somme de composées de fonctions dérivables et

   $f'(x) = 2\ln(3)\mathrm{e}^{2x\ln(3)} - 3\ln(3)\mathrm{e}^{x\ln(3)} = 2\ln(3)3^{2x} - 3\ln(3)3^x = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \frac{3}{2}\right)$

   Donc $\boxed{\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = 2\ln(3)3^x\left(3^x - \dfrac{3}{2}\right)}$.

3. Soit $x \in \mathbb{R}$. $f'(x)$ est du signe de $3^x - \dfrac{3}{2}$ car $2\ln(3)3^x > 0$. De plus,

   $3^x - \dfrac{3}{2} > 0 \iff 3^x > \frac{3}{2} \underset{\ln \nearrow \text{ sur } \mathbb{R}_+^*}{\iff} x\ln(3) > \ln(3/2) \underset{\ln(3)>0}{\iff} x > \dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$

   $f\left(\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}\right) = \mathrm{e}^{2\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} - 3\mathrm{e}^{\ln(3)\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}} + 2 = \mathrm{e}^{\ln(9/4)} - 3\mathrm{e}^{\ln(3/2)} + 2 = \dfrac{9}{4} - \dfrac{9}{2} + 2 = -\dfrac{1}{4}$

   On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$\frac{\ln(3/2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	2	↘	$-\frac{1}{4}$	↗	$+\infty$

4. Soit $x \in \mathbb{R}$.

   $f(x) = 0 \iff (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = 0 \iff \begin{cases} X^2 - 3X + 2 = 0 \\ X = 3^x \end{cases}$ trinôme du second degré de racines évidentes 1 et 2. Donc

   $f(x) = 0 \iff (3^x = 1 \text{ ou } 3^x = 2) \iff (x\ln(3) = \ln(1) \text{ ou } x\ln(3) = \ln(2))$

   Donc $\boxed{\text{l'ensemble des solutions de l'équation } f(x) = 0 \text{ est } S = \left\{0; \dfrac{\ln(2)}{\ln(3)}\right\}}$

   À l'aide du tableau de variation de f, on en déduit son tableau de signe :

x	$-\infty$		0		$\frac{\ln(2)}{\ln(3)}$		$+\infty$
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

5. Sur l'intervalle $I = \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$, f est continue (car dérivable) et strictement croissante. Donc, d'après le théorème de la bijection et le tableau de variation de f,

$$\boxed{f \text{ réalise un bijection de } I \text{ dans l'intervalle } f(I) = J = \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[.}$$

6. Soit $y \in \left[-\dfrac{1}{4}, +\infty\right[$ fixé quelconque et $x \in \left[\dfrac{\ln(3/2)}{\ln(3)}, +\infty\right[$.

$$y = f(x) \iff (3^x)^2 - 3^1 3^x + 2 = y \iff \left(3^x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} = y + \iff \left(3^x - \frac{3}{2}\right)^2 = y + \frac{1}{4}$$

De plus, $y + \dfrac{1}{4} \geq 0$ et $x\ln(3) \geq \ln(3/2)$ (car $\ln(3) > 0$) donc $3^x \geq \dfrac{3}{2}$ (car la fonction exp est croissante sur $\mathbb{R}$). Donc

$$y = f(x) \iff 3^x - \frac{3}{2} = \sqrt{y + \frac{1}{4}} \iff 3^x = \frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}} \iff x\ln(3) = \ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{y + \frac{1}{4}}\right)$$

D'où $\boxed{f_{|I}^{-1} \left| \begin{array}{ccc} \left[-\frac{1}{4}, +\infty\right[& \longrightarrow & \left[\frac{\ln(3/2)}{\ln 3}, +\infty\right[\\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln\left(\frac{3}{2} + \sqrt{x + \frac{1}{4}}\right)}{\ln 3} \end{array} \right.}$

4 Sommes et produits

Exercice 1 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer les sommes et produits suivants

1. $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} 2^{-k}$
2. $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}}$
3. $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} z^{2k+1}$ $(z \in \mathbb{C})$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{2k-1}$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k^2}$

Corrigé

1. $$\sum_{k=1}^{100} 2^{-k} = \sum_{k=1}^{100} \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2}\frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{100}}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^{100}}$$

2. $$\sum_{k=0}^{n} \frac{3^k}{2^{2k-1}} = \sum_{k=0}^{n} 2 \times \left(\frac{3}{2^2}\right)^k = 2\frac{1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} = 8\left(1 - \left(\frac{3}{4}\right)^{n+1}\right)$$

3. $$\sum_{k=1}^{n} z^{2k+1} = z\sum_{k=1}^{n} (z^2)^k = \begin{cases} z \times z^2 \dfrac{(z^2)^n - 1}{z^2 - 1} & \text{si } z \neq \pm 1 \\ nz & \text{si } z = \pm 1 \end{cases} = \begin{cases} \dfrac{z^{2n+3} - z^3}{z^2 - 1} & \text{si } z \neq \pm 1 \\ n & \text{si } z = 1 \\ -n & \text{si } z = -1 \end{cases}$$

4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{2k-1} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{2} \cdot 2^{2k} = \frac{1}{2^n} 2^{\sum_{k=1}^{n} 2k} = \frac{2^{n(n+1)}}{2^n} = \frac{2^{n^2+n}}{2^n} = 2^{n^2}$
5. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} 2^{k^2} = \prod_{k=1}^{n} 2^{k^2} = 2^{\sum\limits_{k=1}^{n} k^2} = 2^{\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$

Exercice 2 Exprimer avec des factorielles :

1. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k}$
2. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2)$
3. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} (n+k)$
4. $\displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$

Corrigé

1. Avec un changement d'indice $j = n - k$ dans le produit du dénominateur :

$$\prod_{k=1}^{n-1} \frac{k}{n-k} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{k=1}^{n-1} (n-k)} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n-1} k}{\prod\limits_{j=1}^{n-1} j} = \frac{n!}{n!} = 1$$

2. On utilise les règles d'un produit

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{n} k(k+1)(k+2) &= \prod_{k=1}^{n} k \cdot \prod_{k=1}^{n} (k+1) \cdot \prod_{k=1}^{n} (k+2) \\ &= n! \cdot \prod_{j=2}^{n+1} j \cdot \prod_{j=3}^{n+2} j \\ &= n!(n+1)! \frac{(n+2)!}{2} \\ &= \frac{(n!)(n+1)!(n+2)!}{2}\end{aligned}$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour écrire $u_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1}$ à l'aide de factorielles, on remarque que

$$\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k-1} = \frac{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k-1)} = \frac{2 \times 4 \times \cdots \times (2n)}{1 \times 3 \times \cdots \times (2n-1)}$$

On introduit alors les nombres pairs au numérateur et au dénominateur

$$u_n = \frac{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times \cdots \times (2n-2) \times (2n-1) \times (2n)} = \frac{[2 \times 4 \times \cdots \times (2n)]^2}{(2n)!}$$

On exploite enfin tous les facteurs 2 du produit des nombres pairs :

$$2\times 4\times\cdots\times(2n)=\prod_{k=1}^{n}(2k)=2^n\prod_{k=1}^{n}k=2^n n!$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{k=1}^{n}\frac{2k}{2k-1}=\frac{\left(2^n n!\right)^2}{(2n)!}=\frac{2^{2n}\left(n!\right)^2}{(2n)!}}$$

Exercice 3 Soit $z\in\mathbb{C}$ et $n\in\mathbb{N}^*$. On pose $S_n=\sum_{k=1}^{n}k\,z^{k-1}$.

1. Justifier que $S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)\,z^k$.
2. En déduire une expression simplifiée de zS_n-S_n, puis de S_n.

Solution

1. Par changement d'indice $j=k-1$

$$S_n=\sum_{j=0}^{n-1}(j+1)z^j$$

2. On suppose que $z=1$. Alors $\boxed{S_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n\,(n+1)}{2}}$

On suppose $z\neq 1$. Alors

$$zS_n-S_n=z\sum_{k=1}^{n}kz^{k-1}-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k=\sum_{k=1}^{n}kz^k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k=\sum_{k=0}^{n}kz^k-\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k$$

On régroupe les termes d'indices communs et par linéarité :

$$zS_n-S_n=nz^n+\sum_{k=0}^{n-1}(k-(k+1))z^k=nz^n-\sum_{k=0}^{n-1}z^k=nz^n-\frac{z^n-1}{z-1}$$

Soit

$$(z-1)S_n=\frac{nz^{n+1}-(n+1)z^n+1}{z-1}$$

Finalement

$$\boxed{S_n=\frac{nz^{n+1}-(n+1)z^n+1}{(z-1)^2}}$$

Exercice 4 Soit $t \in \mathbb{R}$.

1. Exprimer $\sin^6 t$ en fonction de $\cos(2kt)$ pour $k \in [\![0;3]\!]$.
2. Exprimer $\cos(6t)$ en fonction de $\cos t$.

Corrigé

1. Avec les formules d'Euler $\sin^6 t = \left(\dfrac{e^{\mathrm{i}t} - e^{-\mathrm{i}t}}{2\mathrm{i}}\right)^6$, on trouve en développant avec le binôme

$$(a+b)^6 = a^6 + 6a^5b + 15a^4b^2 + 20a^3b^3 + 15a^2b^4 + 6ab^5 + b^6$$

$$\boxed{\sin^6 t = \frac{1}{32}\left(-\cos(6t) + 6\cos(4t) - 15\cos(2t) + 10\right)}$$

2. Avec la formule de Moivre : $\cos(6t) = \Re((\cos t + \mathrm{i}\sin t)^6)$. On obtient en développant avec le binôme et prenant la partie réelle :

$$\boxed{\cos(6t) = 32\cos^6 t - 48\cos^4 t + 18\cos^2 t - 1}$$

Exercice 5

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer $\displaystyle\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j}$ et $\displaystyle\sum_{0\leq k\leq i\leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k}$.
2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{C}$. Calculer les produits $\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} i^j$ et $\displaystyle\prod_{1\leq i,j\leq n} x^{i+j}$

Solution

1. On a

$$\sum_{0\leq i,j\leq n} \binom{i}{j} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{n} \underbrace{\binom{i}{j}}_{=0 \text{ si } j>i} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \overset{\text{binôme}}{=} \sum_{i=0}^{n} 2^i = 2^{n+1} - 1$$

Puis

$$\sum_{0\leq k\leq i\leq n} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{i} \binom{n}{i}\binom{i}{k} = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\sum_{k=0}^{i} \binom{i}{k} \overset{\text{binôme}}{=} \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \times 2^i \overset{\text{binôme}}{=} (2+1)^n = 3^n$$

2. Le 1er produit n'est pas "symétrique". Il y a donc deux approches :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{j=1}^{n}\left(\prod_{i=1}^{n} i^j\right) = \prod_{j=1}^{n}\left(\left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^j\right) = \prod_{j=1}^{n} (n!)^j = (n!)^{\sum_{j=1}^{n} j} = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

ou

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} i^j\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\sum_{j=1}^{n} j}\right) = \prod_{i=1}^{n}\left(i^{\frac{n(n+1)}{2}}\right) = \left(\prod_{i=1}^{n} i\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$$

On trouve ainsi dans les deux cas

$$\boxed{\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} i^j = (n!)^{\frac{n(n+1)}{2}}}$$

Attention avec les produits ! on sort les constantes élevées à la puissance du nombre de facteurs :

$$\begin{aligned}\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} &= \prod_{i=1}^{n}\left(\prod_{j=1}^{n} x^i x^j\right)\\ &= \prod_{i=1}^{n}\left(\left(x^i\right)^n \prod_{j=1}^{n} x^j\right)\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n}\left(x^i\right)^n\right)\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n\\ &= \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^n\left(\prod_{j=1}^{n} x^j\right)^n\end{aligned}$$

Là encore, les variables étant muettes :

$$\prod_{1\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = \left(\prod_{i=1}^{n} x^i\right)^{2n} = \left(x^{\sum_{i=1}^{n} i}\right)^{2n} = \left(x^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{2n}$$

Finalement

$$\boxed{\prod_{0\leqslant i,j\leqslant n} x^{i+j} = x^{n^2(n+1)}}$$

5 Ensembles et dénombrement élémentaire

Exercice 1 Soient A, B et C des parties d'un ensemble E telles que :

$$A\cap B = A\cup C \quad \text{et} \quad A\cup B = A\cap C$$

Montrer que $A = B = C$.

Corrigé On a évidemment $A \subset A \cup C$. Or on donne $A \cup C = A \cap B$. Comme on sait que $A \cap B \subset B$ on en déduit que $A \subset B$.

De même $B \subset A \cup B = A \cap C$ donc $B \subset C$.

Enfin $C \subset A \cup C = A \cap B \subset A$ donc $C \subset A$.

On a donc prouvé que $A \subset B \subset C \subset A$. En particulier $A \subset B \subset A$ donc $A = B$ par double inclusion.

De même $A \subset C \subset A$ donc $A = C$. Finalement on a bien établi $A = B = C$.

Exercice 2 Soient E un ensemble. Pour A, B deux parties de E on définit

$$A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

Soient A, B deux parties de E.

1. Montrer que la réunion définissant $A \triangle B$ est disjointe.
2. Montrer que $A \triangle B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.
3. Montrer que $\overline{A} \triangle \overline{B} = A \triangle B$.
4. Simplifier $A \triangle E$, $A \triangle \varnothing$, $A \triangle \overline{A}$.
5. Résoudre l'équation $A \triangle X = \varnothing$ d'inconnue $X \in \mathscr{P}(E)$.

Solution

1. On peut réécrire $A \Delta B = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A})$ de sorte que

$$(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = (A \cap \overline{B}) \cap (B \cap \overline{A}) \subset A \cap \overline{A} = \varnothing$$

d'où $(A \setminus B) \cap (B \setminus A) = \varnothing$

2. On calcule le membre de droite

$$\begin{aligned}(A\cup B)\setminus(A\cap B) &= (A\cup B)\cap\overline{A\cap B} = (A\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})\\ &= (\underbrace{A\cap\overline{A}}_{=\varnothing})\cup(A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A})\cup(\underbrace{B\cap\overline{B}}_{=\varnothing})\\ &= (A\cap\overline{B})\cup(B\cap\overline{A}) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\\ &= A\Delta B\end{aligned}$$

3. On calcule

$$\begin{aligned}\overline{A}\Delta\overline{B} &= (\overline{A}\cap\overline{\overline{B}})\cup(\overline{B}\cap(\overline{\overline{A}}))\\ &= (\overline{A}\cap B)\cup(\overline{B}\cap A)\\ &= (B\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B})\\ &= (B\setminus A)\cup(A\setminus B) = (A\setminus B)\cup(B\setminus A)\\ \overline{A}\Delta\overline{B} &= A\Delta B\end{aligned}$$

4. On a facilement

$$\begin{aligned}A\Delta E &= E\setminus A = \overline{A}\\ A\Delta\varnothing &= A\setminus\varnothing = A\\ A\Delta\overline{A} &= (A\cup\overline{A})\setminus(A\cap\overline{A}) = E\setminus\varnothing = E\end{aligned}$$

5. Soit $X\subset E$ telle que $A\Delta X=\varnothing$, soit $(A\setminus X)\cup(X\setminus A)=\varnothing$ et donc $A\setminus X=\varnothing=X\setminus A$ (sinon la réunion serait non vide). La première égalité $A\setminus X=\varnothing$ équivaut à $A\subset X$, et la deuxième $X\setminus A=\varnothing$, à $X\subset A$, soit par double inclusion, nécessairement $X=A$.

   Réciproquement, si $X=A$ alors on a déjà calculé $A\Delta A=\varnothing$ et donc A est bien solution de l'équation.

   Par conséquent : $A\Delta X=\varnothing\iff X=A$.