Exo 1 — Correction du DS n°2

1) $\cos^4 x = \dfrac{(e^{ix}+e^{-ix})^4}{2^4} = \dfrac{e^{4ix}+4e^{2ix}+6+4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{2^4}$

$= \dfrac{2\cos(4x)+8\cos(2x)+6}{2^4}$

$\sin^4 x = \dfrac{(e^{ix}-e^{ix})^4}{2^4 i^4} = \dfrac{e^{4ix}-4e^{2ix}+6-4e^{-2ix}+e^{-4ix}}{2^4}$

$= \dfrac{2\cos(4x)-8\cos(2x)+6}{2^4}$

il y a d'autres méthodes mais j'applique ici celle du cours pour linéariser

$4(\cos^4 x + \sin^4 x) = \dfrac{4}{2^4}(4\cos(4x)+12) = \cos(4x)+3$

2) $(\mathcal{E}) \Leftrightarrow 3+\cos(4x) = 7\underbrace{\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)}_{\frac{1}{2}\left[\cos(4x)+\cos\left(\frac{\pi}{3}\right)\right]}$

$\Leftrightarrow 3+\cos(4x) = \dfrac{7}{2}\cos(4x)+\dfrac{7}{4}$

$\Leftrightarrow \dfrac{5}{4} = \dfrac{5}{2}\cos(4x) \Leftrightarrow \cos(4x) = \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 4x = \pm\dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$

$\mathcal{S} = \left\{\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},\ -\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{k\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right\}$

Exo 2

1) On pose $z = x+iy$ et $z^2 = x^2-y^2+2ixy$, $|z^2| = x^2+y^2$

$z^2 = -3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2 = -3 \\ 2xy = -4 \\ x^2+y^2 = \sqrt{25} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y^2 = 4 \\ xy < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = 1-2i \\ \text{ou} \\ z = -1+2i \end{cases}$

2) $z^2 + (1+4i)z + 3(i-1) = 0$ $\quad \Delta = (1+4i)^2 - 12(i-1)$

$= 1-16+8i-12i+12$

$= -3-4i$

$z = \dfrac{+1+4i+4-2i}{2} = \underline{2+i}$ | ou $z = \dfrac{+1+4i-4+2i}{2} = \underline{3i}$ |

d'après 1).

3) $z^8 - (1+4i)z^4 + 3(i-1) = 0$

$\Leftrightarrow z^4 = +3i$ ou $z^4 = +1+i$

$\Leftrightarrow z^4 = 3e^{i\frac{\pi}{2}}$ ou $z^4 = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}$

$\Leftrightarrow$ | $z = 3^{\frac{1}{4}} e^{i\frac{\pi}{8} + i\frac{k\pi}{2}}$ ou $z = 2^{\frac{1}{8}} e^{i\frac{\pi}{16} + i\frac{k\pi}{2}}$ $k \in [\![0,3]\!]$ |

Exo3 $f(z) = \dfrac{z-1}{1-\bar{z}}$

1) $1-\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = 1 \Leftrightarrow z = 1$ donc $\underline{D_f = \mathbb{C}\setminus\{1\}}$

2) $|f(z)| = \dfrac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = \dfrac{|z-1|}{|\overline{1-z}|} = \dfrac{|z-1|}{|z-1|} = 1 \quad \forall z \in D_f$

$\underline{f \text{ n'est pas surjective sur } \mathbb{C}}$ car tout nombre complexe de module différent de 1 n'a pas d'antécédent par f.

3) $f(z) = 1 \Leftrightarrow z-1 = 1-\bar{z} \Leftrightarrow z+\bar{z} = 2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}(z) = 1$ avec $z \neq 1$

$\underline{S = \{1+iy,\ y \in \mathbb{R}^*\}}$ | il a alors une infinité d'antécédents par f et $\underline{f \text{ n'est pas injective.}}$

4) $f(z) \in \mathbb{R} \Leftrightarrow f(z) = 1$ ou $f(z) = -1$ car $|f(z)| = 1 \ \forall z \in D_f$

$f(z) = -1 \Leftrightarrow z-1 = -1+\bar{z} \Leftrightarrow z-\bar{z} = 0 \Leftrightarrow \mathrm{Im}(z) = 0$ avec $z \neq 1$

donc $\underline{f^{-1}(\mathbb{R}) = \{1+iy,\ y \in \mathbb{R}^*\} \cup \mathbb{R}\setminus\{1\}}$ |

5) a) si $z-1 = \rho e^{i\theta}$ alors $\overline{z-1} = \rho e^{-i\theta}$ et $1-\bar{z} = -\rho e^{-i\theta}$

$f(z) = -e^{2i\theta} = e^{2i\theta+i\pi}$ donc $\underline{\arg(f(z)) = 2\theta + \pi\ [2\pi]}$ |

b) $f(z) = e^{i\alpha} \iff \alpha = 2\theta + \pi \ [2\pi]$

$\iff \theta = \frac{\alpha - \pi}{2} \ [\pi]$ et $z = \rho e^{i\theta} + 1$

$$f^{-1}(\{e^{i\alpha}\}) = \{\rho e^{i\left(\frac{\alpha-\pi}{2}\right)} + 1,\ -\rho e^{i\left(\frac{\alpha-\pi}{2}\right)} + 1,\ \rho \in \mathbb{R}\}$$

c) $e^{i\alpha} \in \mathbb{R} \iff \alpha = 0 \ [\pi] \iff \theta = -\frac{\pi}{2} \ [\pi]$ ou $\theta = 0 \ [\pi]$

D'où $f^{-1}(\mathbb{R}) = \{\rho e^{\frac{i\pi}{2}} + 1,\ \rho e^{-\frac{i\pi}{2}} + 1,\ \rho,\ -\rho,\ \rho \in \mathbb{R}\} \setminus \{1\}$

ce qui correspond au résultat précédent.

6) $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, $e^{i\alpha}$ a au moins un antécédent par f d'après 5) b)

et d'après 2) $|f(z)| = 1$ donc $f(\mathbb{C}\setminus\{1\}) = \mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C},\ |z| = 1\}$

Exo 4 1) $A_n = \sum_{k=0}^{n} 3 \times 2^{2k+1} = 6 \sum_{k=0}^{n} 2^{2k} = 6 \frac{1 - 4^{n+1}}{1-4} = 2(4^{n+1} - 1)$

2) $B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} 5^{n-k} = \frac{1}{3}\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 3^k 5^{n-k} - \underbrace{5^n}_{k=0}\right)$

$= \frac{1}{3}(8^n - 5^n)$

FBN $a = 3$ $b = 5$

3) $C_n = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(px)$

$C_n = \mathrm{Re}\left(\sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} e^{ipx}\right) = \mathrm{Re}\left((e^{ix} + 1)^n\right)$ par FBN $a = e^{ix}$ $b = 1$

Or $(e^{ix} + 1)^n = e^{\frac{nix}{2}} \times 2^n \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$ D'où $C_n = 2^n \cos\left(\frac{nx}{2}\right) \cos^n\left(\frac{x}{2}\right)$

Exo 5 $\mathrm{th}(x) = \frac{\mathrm{sh}\,x}{\mathrm{ch}\,x}$ 1. a) $\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x = e^x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

b) $\mathrm{ch}^2 x - \mathrm{sh}^2 x = (\mathrm{ch}\,x + \mathrm{sh}\,x)(\mathrm{ch}\,x - \mathrm{sh}\,x) = e^x \times e^{-x} = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

2) a) $x \longmapsto \mathrm{th}\,x$ est définie sur $\mathbb{R}$ car $\mathrm{ch}\,x \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

et si $x \in \mathbb{R}$ alors $-x \in \mathbb{R}$ avec $\mathrm{th}(-x) = \frac{\mathrm{sh}(-x)}{\mathrm{ch}(-x)} = -\mathrm{th}(x)$

donc th est impaire

2) b) th est dérivable sur $\mathbb{R}$ car ch ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$ et $th'(x) = \dfrac{ch^2 x - sh^2 x}{ch^2 x} = \dfrac{1}{ch^2 x} > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

En $+\infty$ $\quad th(x) = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \dfrac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}}$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-2x} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} th(x) = 1$

Par imparité $\lim\limits_{x \to -\infty} th(x) = -1$

x	$-\infty$		$+\infty$
th'		$+$	
th	-1	↗	1

3) La fonction th est continue, comme quotient de fonctions continues dont le dénominateur ne s'annule pas, sur $\mathbb{R}$.

Donc Im th est un intervalle en tant qu'image d'un intervalle par une fonction continue.

De plus th est strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc th réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\text{Im th} =]-1, 1[$ d'après le théorème de la bijection.

4) $y = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \iff (e^x + e^{-x})\,y = e^x - e^{-x}$

$\iff y e^{2x} + y = e^{2x} - 1$

$\iff (y-1)\,e^{2x} = -y - 1$

$\iff e^{2x} = \dfrac{y+1}{1-y}$

$\iff \underline{x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{y+1}{1-y}\right) \quad \forall y \in]-1,1[}$

$\varphi(x) = \arccos(\text{th}(x)) + \arctan(\text{sh}(x))$

5) φ est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $-1 < \text{th}(x) < 1 \ \forall x \in \mathbb{R}$

$\varphi'(x) = -\dfrac{\text{th}'(x)}{\sqrt{1-\text{th}^2(x)}} + \dfrac{\text{sh}'(x)}{1+\text{sh}^2(x)}$

$1 - \text{th}^2(x) = \dfrac{\text{ch}^2(x) - \text{sh}^2(x)}{\text{ch}^2(x)} = \dfrac{1}{\text{ch}^2(x)}$ et $1 + \text{sh}^2(x) = \text{ch}^2(x)$

$\varphi'(x) = -\dfrac{\text{ch}(x)}{\text{ch}^2(x)} + \dfrac{1}{\text{ch}(x)} = 0$

6) φ est donc constante sur $\mathbb{R}$ avec $\varphi(0) = \arccos(0) + \underbrace{\arctan(0)}_{0} = \dfrac{\pi}{2}$

Donc $\underline{\varphi(x) = \frac{\pi}{2} \ \forall x \in \mathbb{R}}$

7) $\text{th}(x) = \dfrac{5}{13} \iff x = \dfrac{1}{2}\ln\dfrac{\left(\frac{5}{13}+1\right)}{\left(1-\frac{5}{13}\right)} = \underline{\frac{1}{2}\ln\left(\frac{9}{4}\right)}$

8) Si $\text{th}(x) = \dfrac{5}{13}$ alors $\text{ch}^2(x) = \dfrac{1}{1-\text{th}^2(x)} = \dfrac{169}{144}$ et $\text{ch}(x) = \dfrac{13}{12}$

Donc $\text{sh}(x) = \text{th}(x) \times \text{ch}(x) = \dfrac{5}{12}$ donc $\underline{\varphi(x) = \frac{\pi}{2}}$ on vérifie l'égalité