Lycée Jean Perrin **PTSI 1&2**

DS2 de Mathématiques - 4 heures

samedi 7 novembre 2026

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.

L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Équation trigonométrique) (3 points:**1)** 1.5 **2)** 1.5)

1) Montrer que, pour tout x réel, on a: $4\left(\cos^4(x)+\sin^4(x)\right)=3+\cos(4x)$.

2) Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'équation: (E) $4\left(\cos^4(x)+\sin^4(x)\right)=7\cos\left(2x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(2x-\frac{\pi}{6}\right)$.

Exercice n°2 (Équation algébrique) (3.5 points:**1)** 0.5 **2)** 1 **3)** 2)

1) Déterminer les racines carrées de $-3-4i$.

2) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation quadratique $Z^2-(1+4i)Z+3(i-1)=0$.

3) En déduire les solutions complexes de $z^8-(1+4i)z^4+3(i-1)=0$

Exercice n°3 (Application) (6 points: **1)** 0.5 **2)** 0.5+0.5 **3)** 0.5+0.5 **4)** 1 **5) a-** 0.5 **b-** 0.5 **c-** 0.5+0.5 **6)** 0.5)

Soit f la fonction de la variable complexe à valeurs complexes définie par $f(z)=\frac{z-1}{1-\bar{z}}$.

1) Préciser son ensemble de définition D_f.

2) Montrer que f(z) est de module 1 pour tout $z\in D_f$. f est-elle surjective?

3) Résoudre $f(z)=1$. f est-elle injective?

4) Déterminer $f^{-1}(\mathbb{R})$.

5) a) Soit $\rho e^{i\theta}$ la forme exponentielle de z-1 pour tout $z\in D_f$. Montrer que $\arg(f(z))\equiv 2\theta+\pi\,[2\pi]$.
b) En déduire, $\forall\alpha\in\mathbb{R}$, l'ensemble $f^{-1}\left(\{e^{i\alpha}\}\right)$ des antécédents par f de $e^{i\alpha}$.
c) Retrouver à partir du 5b) $f^{-1}(\mathbb{R})$.

6) Quelle est donc l'image de f?

Exercice n°4 (Calcul algébrique) (2.5 points: **1)** 0.5 **2)** 1 **3)** 1)

Calculer

1) $A_n = \sum_{k=0}^{n} 3 \times 2^{2k+1}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

2) $B_n = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}\, 5^{n-k}$, $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$.

3) $C_n(x) = \sum_{p=0}^{n} \binom{n}{p} \cos(p\,x)$, $\forall\, n \in \mathbb{N}$.

Exercice n°5 (Fonction) (5 points: **1) a)** 0.25 **b)** 0.25 **2) a)** 0.25 **b)** 3x0.25 **3)** 0.25+0.25 **4)** 1 **5)** 0.5 **6)** 0.5 **7)** 0.5 **8)** 0.5)

On considère la *tangente hyperbolique*, notée *th*, définie sur $\mathbb{R}$ par $x \mapsto y$ où $y = \text{th}(x) = \frac{\text{sh}(x)}{\text{ch}(x)}$.

1) a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ simplifier ch(x)+sh(x).

b) Retrouver à partir du a) l'identité fondamentale de la géométrie hyperbolique.

2) a) Montrer que *th* est une fonction impaire.

b) Déterminer sa fonction dérivée *th'* et dresser son tableau de variations après avoir évalué ses limites en $\pm\infty$.

3) Montrer que son image $\mathcal{Im}(th)$ est un intervalle (que nous noterons $\mathcal{I}$) et expliquer pourquoi *th* réalise une bijection de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathcal{I}$.

4) Déterminer explicitement sa bijection réciproque définie dans $\mathcal{I}$ par $y \mapsto x$.

Dans ce qui suit, on considère la fonction φ définie dans $\mathbb{R}$ par $\varphi(x) = \arccos(\text{th}(x)) + \arctan(\text{sh}(x))$.

5) Déterminer son nombre dérivé $\varphi'(x)$ pour tout x.

6) En déduire une expression simplifiée de $\varphi(x)$.

7) Résoudre l'équation $\text{th}(x) = \frac{5}{13}$.

8) Déduire de ce qui précède que: $\arccos\left(\frac{5}{13}\right) + \arctan\left(\frac{5}{12}\right) = \frac{\pi}{2}$.