Devoir maison n° 7

A rendre le jeudi 19 novembre 2026

Exercice 1 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système linéaire

$$(S)\begin{cases} mx + y + z = 1 \\ x + my + z = m \\ x + y + mz = 1 \\ x + y + z = m \end{cases}, \quad \text{de paramètre } m \text{ et d'inconnues } x, y \text{ et } z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.
2. Dans le cas où (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $\forall x \in \mathbb{R},\ F_n(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t$

1. Montrer que la fonction F_n est bien définie sur $\mathbb{R}$.
2. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. Calculer $F_1(x)$.
3. Calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{(1+t^2)^2}\mathrm{d}t$ à l'aide du changement de variable $t = \tan(u)$.
4. Soit $x \in \mathbb{R}$ fixé. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que
$$\int_0^x \frac{1}{(1+t^2)^n}\mathrm{d}t = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n\int_0^x \frac{t^2}{(1+t^2)^{n+1}}\mathrm{d}t$$
5. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R},\ 2nF_{n+1}(x) = (2n-1)F_n(x) + \dfrac{x}{(1+x^2)^n}$
6. Expliciter alors $F_2(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   Vérifier que l'on retrouve ainsi le résultat de la question 3.