Correction du devoir maison n° 2

Exercice 18 On considère un triangle ABC non aplati, et on note O le centre de son cercle circonscrit. On se place dans un repère orthonormé direct de centre O, dans lequel on note a, b et c les affixes respectives de A, B et C.

Rappel O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC, c'est l'intersection des médiatrices du triangle ABC, il est donc equidistant des sommets du triangle : $|a| = |b| = |c|$.

1. Montrer que les trois médianes de ABC sont concourantes en G d'affixe $\dfrac{a+b+c}{3}$.

   Rappel Une médiane d'un triangle est une droite passant par un sommet et par le milieu du côté opposé.

   Correction Soit I $\left(\dfrac{b+c}{2}\right)$ le milieu du segment $[BC]$ et G $\left(\dfrac{a+b+c}{3}\right)$.
   $z_{\overrightarrow{AG}} = z_G - z_A = \dfrac{a+b+c}{3} - a = \dfrac{b+c-2a}{3}$ et $z_{\overrightarrow{AI}} = z_I - z_A = \dfrac{b+c}{2} - a = \dfrac{b+c-2a}{2}$
   donc $\overrightarrow{AG} = \dfrac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ et G $\in$ (AI).

   On démontre de même que G $\in$ (BK) où K est le du segment $[AC]$.

   Donc G est bien l'intersection des médianes du triangle ABC, appelé **centre de gravité** du triangle ABC.

2. Montrer que H d'affixe $a+b+c$ est le point de concours des hauteurs de ABC.

   Rappel Une hauteur dans un triangle est une droite passant par un sommet et perpendiculaire au côté opposé.

   Correction Soit H $(a+b+c)$. $z_{\overrightarrow{AH}} = b+c$ et $z_{\overrightarrow{BC}} = b-c$

   donc $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} = \dfrac{b+c}{c-b} \times \dfrac{\overline{c}-\overline{b}}{\overline{c}-\overline{b}} = \dfrac{b\overline{c} - b\overline{b} + c\overline{c} - c\overline{b}}{|c-b|^2} = \dfrac{b\overline{c} - c\overline{b}}{|c-b|^2}$ car $|b| = |c|$.

   Or $|c-b|^2 \in \mathbb{R}$ et $b\overline{c} - c\overline{b} \in \mathrm{i}R$ car $b\overline{c}$ et $c\overline{b}$ sont conjugués.
   D'où $\dfrac{z_{\overrightarrow{AH}}}{z_{\overrightarrow{BC}}} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ donc $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BC}$ et H appartient à la hauteur du triangle issue de A.
   On démontre de même que H appartient à une des deux autres hauteurs et on en déduit que H est le point de concours des hauteurs de ABC, appelé **orthocentre** du triangle ABC.

3. Que peut-on dire des points O, G et H ?

   $z_G = \dfrac{1}{3}\, z_H$ donc les points O, G et H sont alignés. La droite contenant ces trois points est appelée **droite d'Euler** du triangle ABC.

Exercice 19 Pour $z \in \mathbb{C}^*$, on considère les points M, N et P d'affixes respectives z, z^2 et z^3.

Déterminer l'ensemble des points M tels que MNP soit un triangle rectangle.

Correction

- $M = N \iff z = z^2 \iff z(1-z) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 1$.
- $M = P \iff z = z^3 \iff z(1-z)(1+z) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 1$ ou $z = -1$.
- $N = P \iff z^2 = z^3 \iff z^2(1-z) = 0 \iff z = 0$ ou $z = 1$.

  Par disjonction des cas,

  $\boxed{\text{deux des points } M, N \text{ et } P \text{ sont confondus si, et seulement si, } z \in \{-1, 0, 1\}}$.

Soit $z \in \mathbb{C} \backslash \{-1, 0, 1\}$.

- MNP rectangle en M si, et seulement si, $\dfrac{z^3 - z}{z^2 - z} = z + 1 \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = -1$.
- MNP rectangle en N si, et seulement si, $\dfrac{z^3 - z^2}{z - z^2} = -z \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \mathrm{Re}(z) = 0$.
- MNP rectangle en P si, et seulement si, $\dfrac{z^2 - z^3}{z - z^3} = \dfrac{z}{1+z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.

  Si $z = x + \mathrm{i}y$, avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, alors :

  $$\frac{z}{1+z} \in \mathrm{i}\mathbb{R} \iff \frac{z}{1+z} = -\frac{\overline{z}}{1+\overline{z}} \iff z + \overline{z} + 2z\overline{z} = 0 \iff \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4}.$$

Notons A le point d'affixe -1, D_1 la droite d'équation $x = -1$, D_2 celle d'équation $x = 0$, et C le cercle de centre $\Omega\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ et de rayon $\dfrac{1}{2}$. Par disjonction des cas, l'ensemble des points M d'affixe z tels que le triangle MNP est rectangle est

$$\boxed{(D_1 \cup D_2 \cup C) \backslash \{O, A\}}.$$