Correction du Test n$^{\text{o}}$ 11

Sujet A

1.

2. $A = \left\{(-1)^n + \dfrac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^*\right\}$

   $-1 \leqslant (-1)^n + \dfrac{1}{n} \leqslant 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$ donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure en tant que partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

   Comme $(-1)^{2n+1} + \dfrac{1}{2n+1} \to -1$ lorsque $n \to +\infty$, $\inf A = -1$.

   Mais $-1 \notin A$, donc A n'admet pas de minimum.

   Pour $n > 2, (-1)^n + \dfrac{1}{n} \leqslant 1 + \dfrac{1}{2}$ donc $\sup A = \max A = \dfrac{3}{2}$.

3. (a) Soit (a_k), une suite réelle. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

   Initialisation Pour $n = 1$,

   $\left|\sum_{k=1}^{1} a_k\right| = |a_1|$ et $\sum_{k=1}^{1} |a_k| = |a_1|$, donc l'inégalité est vérifiée.

   Hérédité Supposons qu'à un rang n on ait $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

   On a $\left|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} a_k + a_{n+1}\right| \leq \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| + |a_{n+1}|$ par inégalité triangulaire

   $\leqslant \sum_{k=1}^{n} |a_k| + |a_{n+1}| = \sum_{k=1}^{n+1} |a_k|$ d'après l'hypothèse de récurrence

   Conclusion On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$.

   (b) Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$. Montrer que $\left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

   Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $k \in [\![1, n]\!]$ et $x \in \mathbb{R}$, $|(-1)^n \sin(nx)| = |\sin(nx)| \leqslant 1$ et

   $|n + k^2| \geqslant n$ donc $\dfrac{1}{|n + k^2|} \leqslant \dfrac{1}{n}$

   d'où $\left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2}\right| \leq \dfrac{1}{n}$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\left|\sum_{k=1}^{n} \dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2}\right| \leq \sum_{k=1}^{n} \left|\dfrac{(-1)^n \sin(nx)}{n + k^2}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{n} = n \times \dfrac{1}{n}$.

Correction du Test n° 11

Sujet B

1.

2. $A = \left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right), x \in]0, \pi[\right\}$

   $-1 \leqslant \sin\left(\frac{1}{x}\right) \leqslant 1, \forall x \in]0, \pi[$ donc A admet une borne inférieure et une borne supérieure en tant que partie non vide bornée de $\mathbb{R}$.

   Or $\frac{2}{\pi}$ et $\frac{2}{3\pi}$ sont dans l'intervalle $]0, \pi[$ avec $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{\pi}}\right) = 1$ donc $\sup A = \max A = 1$ et $\sin\left(\frac{1}{\frac{2}{3\pi}}\right) = -1$ donc
   $\inf A = \min A = -1.$.

3. Soit (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2 + u_n^2}$.

   (a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$.

   $\forall n \in \mathbb{N}$, $|2 + u_n^2| \geqslant 2$ donc $\left|\dfrac{1}{2 + u_n^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{2}$ et $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n|$

   (b) En déduire, à l'aide d'une récurrence, que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$.

   Initialisation $u_0 = 2$ et $\dfrac{1}{2^{-1}} = 2$ donc l'inégalité est vraie au rang 0.

   Hérédité Supposons qu'à un rang n on ait $|u_n| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

   on a alors $|u_{n+1}| \leq \frac{1}{2}|u_n| \leqslant \frac{1}{2}\frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$

   Conclusion On a démontré par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \ |u_n| \leq \dfrac{1}{2^{n-1}}$

   (c) Trouver un entier p tel que u_p est proche de 0 à 10^{-3} près.

   u_p est proche de 0 à 10^{-3} près si $|u_p| \leqslant 10^{-3}$ donc il suffit de choisir

   $\dfrac{1}{2^{p-1}} \leqslant 10^{-3} \Leftrightarrow 2^{p-1} \geqslant 10^3 \Leftrightarrow (p-1)\ln 2 \geqslant 3\ln 10 \Leftrightarrow p \geqslant \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} + 1$

   Or $p \in \mathbb{N}$ donc $p = \lfloor \dfrac{3\ln 10}{\ln 2} \rfloor + 2$ convient.