# Nombres réels, nombres entiers

## 1 Relation d'ordre sur $\mathbb{R}$

**Rappel :** Les nombres réels sont représentés sur la droite réelle (graduée).

• On note $\mathbb{R}_+$ l'ensemble des nombres réels positifs (ou nuls).

• On note $\mathbb{R}_-$ l'ensemble des nombres réels négatifs (ou nuls).

• 0 est l'unique nombre réel qui soit à la fois positif et négatif.

**Propriété 1.** Soient $a, b \in \mathbb{R}_+$. Si $a + b = 0$ alors $a = 0$ et $b = 0$.

**Exemple 1.** Déterminer l'ensemble des nombres réels $x$ vérifiant :

$$\sqrt{x^2 + 5x + 4} + \sqrt{x + 1} = 0.$$

**Définition 1.** On définit une **relation d'ordre** sur $\mathbb{R}$, notée $\leq$, de la manière suivante :

pour tout nombre réel $a$ et $b$, $a \leq b$ signifie que $b - a \in \mathbb{R}_+$ (ou $a - b \in \mathbb{R}_-$).

Si $a \leq b$, on dit que $a$ est inférieur (ou égal) à $b$, ou que $b$ est supérieur (ou égal) à $a$, ce qui s'écrit encore $b \geq a$. Dans ce cas, on dit aussi que $a$ est majoré par $b$ ou que $b$ est minoré par $a$.

**Exemple 2.** Soient $a$ et $b$ deux nombres réels strictement positifs. On note $A$ leur moyenne arithmétique et $H$ leur moyenne harmonique, définies par $A = \dfrac{a+b}{2}$ et $\dfrac{2}{H} = \dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b}$.

Comparer les nombres réels $A$ et $H$.

**Remarque :** La négation de $a \leq b$ est : $a \geq b$ et $a \neq b$ (ce qui s'écrit $a > b$).

$\mathbb{R}_+^*$ (resp. $\mathbb{R}_-^*$) est l'ensemble des nombres réels $a$ vérifiant $a > 0$ (resp. $a < 0$).

**Propriété 2. RAT** La relation d'ordre $\leq$ vérifie, pour tout réel $a, b$ et $c$ :

1. $a \leq a$ **Réflexivité**
2. si $a \leq b$ et $b \leq c$ alors $a \leq c$ **Transitivité**
3. si $a \leq b$ et $b \leq a$ alors $a = b$ **Antisymétrie**.

**Propriété 3. Compatibilité avec l'addition et la multiplication**

Soient $a$, $b$ et $c$ trois nombres réels.

1. si $a \leq b$ alors $a + c \leq b + c$.
2. Si $a \leq b$ et $c \geq 0$ alors $ac \leq bc$.
3. Si $a \leq b$ et $c \leq 0$ alors $ac \geq bc$.

**Corollaire 1.** Soient $a$, $b$, $c$ et $d$ quatre nombres réels.

1. Si $a \leq b$ et $c \leq d$ alors $a + c \leq b + d$
2. Si $0 \leq a \leq b$ et $0 \leq c \leq d$ alors $ac \leq bd$

**Exemple 3.** $x$ et $y$ sont deux nombres réels tels que $1 \leq x \leq 3$ et $-5 \leq y \leq -2$.

Encadrer les nombres réels $A = 2x + 3y - 5$, $B = xy$ et $C = (x - y)^2$.

**Corollaire 2.** Soient $a$, $b$ deux nombres réels et $n$ un entier naturel non nul.

1. si $0 \leq a \leq b$ alors $a^n \leq b^n$
2. Si $0 \leq a \leq b$ alors $\sqrt{a} \leq \sqrt{b}$
3. si $0 < a \leq b$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

Si $a \leq b < 0$ alors $\dfrac{1}{a} \geq \dfrac{1}{b}$.

**Exemple 4.** $x$ est un nombre réel tel que $0 \leq x \leq 2\pi$. Encadrer $f(x) = \sqrt{\dfrac{\cos(x) + 2}{x^3 + 1}}$ par deux nombres entiers.

## 2 Intervalles de $\mathbb{R}$ et valeur absolue

**Définition 2.** Soient $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$. On définit les **intervalles** de $\mathbb{R}$ de la manière suivante :

| intervalles bornés | intervalles non bornés |
|---|---|
| $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x \leq b\}$ fermé | $[a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x\}$ fermé |
| $]a, b[ = \{x \in \mathbb{R} /\ a < x < b\}$ ouvert | $]a, +\infty[ = \{x \in \mathbb{R} /\ a < x\}$ ouvert |
| $[a, b[ = \{x \in \mathbb{R} /\ a \leq x < b\}$ semi-ouvert à droite | $]-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ x \leq b\}$ fermé |
| $]a, b] = \{x \in \mathbb{R} /\ a < x \leq b\}$ semi-ouvert à gauche | $]-\infty, b[ = \{x \in \mathbb{R} /\ x < b\}$ ouvert |

**Cas particuliers :** $]a, a[ = \emptyset$ (ensemble vide), $]-\infty, +\infty[ = \mathbb{R}$, $[0, +\infty[ = \mathbb{R}_+$ ...

**Exemple 5.** Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \left[0, 1 + \dfrac{1}{n}\right]$ et $J_n = \left[0, 1 - \dfrac{1}{n}\right]$.

1. Montrer que $I_{n+1} \subset I_n$ et que $J_n \subset J_{n+1}$.
2. En déduire l'intersection des intervalles $I_n$ et la réunion des $J_n$.

**Remarque** On peut définir les intervalles de nombres entiers en posant, pour deux entiers relatifs $m$ et $n$ tels que $m < n$ : $[\![m, n]\!] = \{m, m+1, \dots, n-1, n\}$.

**Définition 3.** Pour tout nombre réel $x$ on définit sa **valeur absolue** en posant :

$$|x| = \sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geq 0 \\ -x & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

**Exemple 6.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $|x| = 3$ $\qquad |x| < 3$ $\qquad 3 \leq |x| < 5$.

**Remarque :** Pour tout réel $x$, $|x| \geq 0$, avec égalité ssi $x = 0$. $\qquad |-x| = |x|$ , $\qquad x \leq |x|$, $|x|^2 = x^2$.

**Définition 4.** Soient $a \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. **La distance entre un nombre réel** $x$ **et** $a$ est le nombre réel positif

$$|x - a| = \begin{cases} x - a & \text{si } x \geq a \\ a - x & \text{si } x < a \end{cases}$$

$x$ est une **valeur approchée** de $a$ à $\varepsilon$ près ssi $|x - a| \leq \varepsilon$

$x$ est une **valeur approchée par défaut** de $a$ à $\varepsilon$ près ssi $a - \varepsilon \leq x \leq a$

$x$ est une **valeur approchée par excès** de $a$ à $\varepsilon$ près ssi $a \leq x \leq a + \varepsilon$.

**Exemple 7.** Majorer la distance entre $a$ et $b$ où $a$ est une valeur approchée à $10^{-2}$ près par défaut de $2,41$ et $b$ est une valeur approchée à $0,1$ près de $2,4$.

**Propriété 4.** Soit $\varepsilon > 0$. Pour tout réel $x$, $|x|$ est la distance entre $x$ et $0$, et

1. $|x| = \varepsilon \Leftrightarrow x = -\varepsilon$ ou $x = \varepsilon$ $\qquad$ 2. $|x| \leq \varepsilon \Leftrightarrow -\varepsilon \leq x \leq \varepsilon$ $\qquad$ 3. $|x| \geq \varepsilon \Leftrightarrow x \leq -\varepsilon$ ou $x \geq \varepsilon$.

**Exemple 8.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ : $\quad$ a) $|1 - 2x| = |x - 2|$ $\qquad$ b) $|3x + 2| < 1$ $\qquad$ c) $|4 - 5x| \geq 2$.

**Propriété 5.** Soit $x, y \in \mathbb{R}$. 1. $|xy| = |x| \times |y|$ $\qquad$ 2. Si $y \neq 0$ alors $\left|\dfrac{x}{y}\right| = \dfrac{|x|}{|y|}$ $\qquad$ 3. Si $n \in \mathbb{N}$ alors $|x^n| = |x|^n$

**Propriété 6. Inégalité triangulaire** Pour tous nombres réels $x$ et $y$, $|x+y| \leq |x| + |y|$.

**Exemple 9.** Majorer $|x+y|$, $\left|\dfrac{x}{y}\right|$ et $\sqrt{x^2+y^2}$ sachant que $x \in [-1,2]$ et $y \in [1,3]$.

**Corollaire 3.** Pour tous nombres réels $x$ et $y$, $||x| - |y|| \leq |x-y| \leq |x| + |y|$.

## 3 Parties de $\mathbb{R}$ majorées, minorées, bornées

**Définition 5.** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$ (c.à.d. $A$ est un ensemble de nombre réels).

1. On dit que $M \in \mathbb{R}$ est un **majorant** de $A$ si tout élément $x$ de $A$ vérifie $x \leq M$.
   Si un tel réel $M$ existe, on dit que la partie $A$ est majorée.
2. On dit que $m \in \mathbb{R}$ est un **minorant** de $A$ si tout élément $x$ de $A$ vérifie $x \geq m$.
   Si un tel réel $m$ existe, on dit que la partie $A$ est minorée.
3. On dit que $A$ est **bornée** si $A$ est à la fois minorée et majorée.

**Exemple 10.** La partie $A = \left\{t^2 - t + 1,\ t \geq 0\right\}$ de $\mathbb{R}$ est-elle majorée ? minorée ? bornée ?

**Théorème 1. et définition** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A$ est majorée et contient un de ses majorants, alors elle ne peut en contenir qu'un.
   Un tel élément de $A$ est appelé **maximum (ou plus grand élément)** de $A$, et noté $\max(A)$.
2. Si $A$ est minorée, et contient un de ses minorants, alors elle ne peut en contenir qu'un.
   Un tel élément de $A$ est appelé **minimum (ou plus petit élément)** de $A$, et noté $\min(A)$.

**Conséquence** Si ils existent, le maximum et le minimum de $A$ sont définis par :

1. $M = \max(A)$ ssi $M \in A$ et tout élément $x$ de $A$ vérifie $x \leq M$.
2. $m = \min(A)$ ssi $m \in A$ et tout élément $x$ de $A$ vérifie $x \geq m$.

**Exemple 11.** Étudier l'existence d'un maximum et d'un minimum de $A = [0,1[$.

**Définition 6.** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$.

1. Si $A$ est majorée, et si l'ensemble de ses majorants admet un plus petit élément, celui-ci est appelé **borne supérieure** de $A$, et noté $\sup(A)$.
2. Si $A$ est minorée, et si l'ensemble de ses minorants admet un plus grand élément, celui-ci est appelé **borne inférieure** de $A$, et noté $\inf(A)$.

**Conséquence** Si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de $A$ sont définies par :

1. $M = \sup(A)$ ssi $M$ est un majorant de $A$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x$ de $A$ vérifiant $M - \varepsilon < x \leq M$
2. $m = \inf(A)$ ssi $m$ est un minorant de $A$ tel que pour tout $\epsilon > 0$, il existe un élément $x$ de $A$ vérifiant $m \leq x < m + \varepsilon$

**Théorème 2. de la borne supérieure ( admis)**

Toute partie non vide et majorée (resp. minorée) de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure (resp. inférieure).

**Exemple 12.** Dans chaque cas, montrer que $A$ admet des bornes supérieure et inférieure, et étudier l'existence d'un maximum et d'un minimum de $A$ :

$$\text{a) } A = \left\{\frac{1}{1+t},\ t > 0\right\} \qquad \text{b) } A = \left\{\frac{n - \frac{1}{n}}{n + \frac{1}{n}},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

**Remarque :** Soit $A$ une partie non vide de $\mathbb{R}$. Si $A$ admet un maximum, alors $A$ admet une borne supérieure et $\sup(A) = \max(A)$. Si $A$ admet un minimum, alors $A$ admet une borne inférieure et $\inf(A) = \min(A)$.

**Corollaire 4.** Soit $I$ une partie de $\mathbb{R}$.

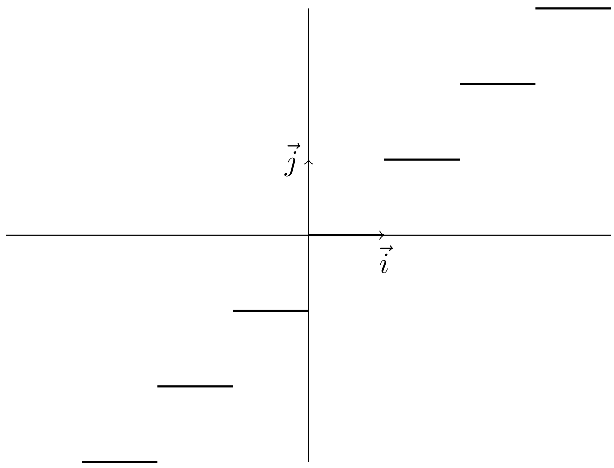
$I$ est un intervalle de $\mathbb{R}$ ssi pour tous $a, b \in I$ tels que $a \leq b$, on a $[a, b] \subset I$.

**Exemple 13.** La partie $A = \{x \in \mathbb{R}/\ |x| \geq 10^{-6}\}$ est-elle un intervalle de $\mathbb{R}$ ?

**Remarque :** L'intersection de deux intervalles est un intervalle. Mais la réunion de deux intervalles n'est, en général, pas un intervalle.

# 4 Partie entière et approximations décimales d'un réel

**Rappel :** Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{R}$ admet une borne supérieure. On admettra aussi que toute partie non vide et majorée de $\mathbb{Z}$ admet un plus grand élément (un maximum).




**Théorème 3. et définition** Pour tout réel $x$, il existe un unique entier relatif $m$ tel que

$$m \leq x < m+1.$$

Ce nombre $m$ est appelé **partie entière** de $x$, noté $\lfloor x \rfloor$ et vérifie $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$.

**Exemple 14.** Déterminer la partie entière des nombres $-2.3$, $\dfrac{5}{3}$ et $\sqrt{7}$.

**Exemple 15.** Résoudre dans $\mathbb{R}$ a) $\lfloor x \rfloor \leq -2$ b) $\left\lfloor \sqrt{x^2+1} \right\rfloor = 1$.

**Propriété 7.** Soit $a \in \mathbb{R}$. 1. $a-1 < \lfloor a \rfloor \leq a$. 2. $a \in \mathbb{Z} \Longleftrightarrow a = \lfloor a \rfloor$

3. Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $\lfloor a+n \rfloor = \lfloor a \rfloor + n$ 4. si $n \in \mathbb{Z}$ alors $n \leq a \Longleftrightarrow n \leq \lfloor a \rfloor$.

**Exemple 16.** Étudier la fonction (partie décimale) $\delta : x \mapsto x - \lfloor x \rfloor$. Tracer l'allure de son graphe.

**Remarque :** Si $(k,n) \in \mathbb{N}^2$ alors $0 \leq 2k \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{n}{2} \right\rfloor$ et $1 \leq 2k+1 \leq n \Longleftrightarrow 0 \leq k \leq \left\lfloor \dfrac{n-1}{2} \right\rfloor$.

**Théorème 4.** Soit $x \in \mathbb{R}$, et $n \in \mathbb{N}$.

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une approximation décimale par défaut de $x$ à $10^{-n}$ près.

Le nombre $\dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor + 1}{10^n}$ est une approximation décimale par excès de $x$ à $10^{-n}$ près.

**Exemple 17.** Trouver des approximations décimales par défaut et par excès de $\dfrac{1}{3}$ à $10^{-5}$ près.

**Remarque :** Pour tout réel $x$, la suite de terme général $u_n = \dfrac{\lfloor 10^n x \rfloor}{10^n}$ est une suite de nombres décimaux qui converge vers $x$.

# 5 Arithmétique dans $\mathbb{N}$

## 5.1 Diviseurs et multiples d'un entier naturel

**Définition 7.** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels.

On dit que $b$ **divise** $a$ s'il existe un entier naturel $k$ tel que $a = kb$.

Dans ce cas, on dit que $b$ est un **diviseur** de $a$ ou que $a$ est un **multiple** de $b$ et on note $b|a$.

**Exemple 18.** Expliciter l'ensemble des multiples de 5 et l'ensemble des diviseurs de 40 dans $\mathbb{N}$.

**Remarque :** Tout entier $a$ divise 0. Tout entier $a$ est divisible par 1.

La relation de divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Pour tout $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$, 1. $a|a$ (réflexivité). 2. $(a|b$ et $b|c) \Rightarrow a|c$ (transitivité) 3. $(a|b$ et $b|a) \Rightarrow a = b$ (antisymétrie).
De plus, si $a \neq 0$ alors on a : $b|a \Longrightarrow b \leq a$ (réciproque est fausse).

**Propriété 8.** Soit $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$. Si $c|a$ et $c|b$ alors $\forall (u, v) \in \mathbb{N}^2$, $c|au + bv$.

**Théorème 5. et définition** Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, avec $b \neq 0$.

Il existe un unique couple $(q, r) \in \mathbb{N}^2$ tel que $a = bq + r$ et $0 \leq r < b$.

$q$ et $r$ sont respectivement appelés **quotient et reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.**

**Remarque :** Le quotient $q$ et le reste $r$ de la division euclidienne de $a$ par $b$ vérifient :

$$q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor \text{ et } r = a - b \times \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor.$$

**Exemple 19.** Déterminer le quotient et le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$.

a) $a = 221$ et $b = 11$ b) $a = 2n^2 + 1$ et $b = n - 1$, $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$.

**Corollaire 5.** Soit $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, avec $b \neq 0$.

$b$ divise $a$ ssi le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ est nul.

**Définition 8.** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls.

• On appelle **PGCD** (ou plus grand diviseur commun) de $a$ et $b$ le plus grand entier naturel $d$ qui divise $a$ et $b$. On le note $a \wedge b$.

• On dit que $a$ et $b$ sont **premiers entre eux** si $a \wedge b = 1$.

• On appelle **PPCM** (ou plus petit multiple commun) de $a$ et $b$ le plus petit entier naturel $m$ non nul divisible par $a$ et $b$. On le note $a \vee b$.

**Exemple 20.** Déterminer $12 \wedge 15$ et $12 \vee 15$.

**Propriété 9.** Soient $a$ et $b$ deux entiers naturels non nuls.

Si $r$ est le reste de la division euclidienne de $a$ par $b$ alors $a \wedge b = b \wedge r$.

**Application : Algorithme d'Euclide** pour calculer $a \wedge b$ :

- On pose $r_0 = a$ et $r_1 = b$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $r_n \neq 0$,
$r_{n+1}$ est le reste de la division euclidienne de $r_{n-1}$ par $r_n$.
- Dès que $r_N = 0$, on a $a \wedge b = r_{N-1}$ (dernier reste non nul).

**Exemple 21.** Déterminer $90 \wedge 40$.

### 5.2 Nombres premiers et factorisation d'un entier

**Définition 9.** Un **nombre premier** est un entier $p \geq 2$ dont les seuls diviseurs sont 1 et $p$.

**Exemple 22.** Écrire la liste des nombres premiers compris entre 1 et 50.

**Théorème 6.** Il existe une infinité de nombres premiers.

**Crible d'Ératosthène** pour déterminer les nombres premiers entre 1 et $n$ :

- On écrit la liste des entiers de 1 à $n$.
- On raye tous les multiples stricts de 2, puis tous ceux de 3, ..., on s'arrête à $\sqrt{n}$.

**Théorème 7. Décomposition d'un entier en produit de facteurs premiers (admis)**

Pour tout entier $n \geq 2$ il existe, pour un certain $k \in \mathbb{N}^*$, des nombres premiers
$p_1 < p_2 < \ldots < p_k$ et des entiers naturels non nuls $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ tels que :

$$n = p_1^{\alpha_1} \times p_2^{\alpha_2} \times \cdots \times p_k^{\alpha_k} = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

De plus, cette décomposition est unique.

**Exemple 23.** Décomposer en produit de facteurs premiers les nombres $a = 256$ et $b = 1210$.

En déduire leur PGCD et leur PPCM.