Nombres réels, nombres entiers

Exercice 1

1. Montrer que pour tous réels positifs x et y, $\sqrt{xy} \leq \dfrac{x+y}{2}$,
   avec égalité si et seulement si $x = y$.

2. Montrer que pour tous réels x et y strictement positifs, $\dfrac{\ln(x)+\ln(y)}{2} \leq \ln\left(\dfrac{x+y}{2}\right)$.
   Interpréter géométriquement ce résultat.

Exercice 2 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. a) $\dfrac{3x+1}{x-2} = \dfrac{2}{x+1}$ b) $\dfrac{2x^2+4x-6}{x-1} = 0$

2. a) $\sqrt{x^2+12} = 2x$ b) $\sqrt{x^2+3x-4} - \sqrt{3x^2+4x-4} = 0$

3. a) $\sqrt{2x^2-x-1} = \sqrt{x^2-3x+2}$ b) $\sqrt{4x^2-4x+1} = 1-2x$

Exercice 3 Déterminer l'ensemble des valeurs de x vérifiant :

a) $\dfrac{3x-6}{x+4} \geq \dfrac{5x-10}{x-6}$ b) $\sqrt{x-1} < \sqrt{3-2x}$ c) $\sqrt{x+2} < x$

Exercice 4 Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. a) $|x+1| + |x| = |x-3|$ b) $\sqrt{x^2-5x+4} = |x-1|$

2. a) $|9x^2-48x+47| \geq 8$ b) $||x-1|-x| \leq 1.$

Exercice 5

1. Montrer que pour tous réels x et y :
$$\frac{|x|+|y|}{2} \leq \max\{|x|,|y|\} \leq \sqrt{x^2+y^2} \leq |x|+|y| \leq 2\max\{|x|,|y|\}.$$

2. Dans un repère orthonormé du plan, représenter l'ensemble des points $M(x,y)$ vérifiant :

   a) $\max\{|x|,|y|\} \leq 1$ b) $\sqrt{x^2+y^2} \leq 1$ c) $|x|+|y| \leq 1$

Exercice 6 Dans chaque cas étudier, si elles existent, les bornes supérieure et inférieure de l'ensemble A :

1. $A = \left\{\dfrac{x^2}{1+x^2},\ x \in \mathbb{R}\right\}$. 2. $A = \left\{\dfrac{\ln(n)}{n},\ n \in \mathbb{N}^*\right\}$ 3. $A = \left\{\left|\dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{m}\right|,\ n,m \in \mathbb{N}^*\right\}$

Exercice 7

1. Montrer que $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$, $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor$ ou $\lfloor x+y \rfloor = \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\left\lfloor \dfrac{\lfloor nx \rfloor}{n} \right\rfloor = \lfloor x \rfloor$.

Exercice 8 Soit la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{\lfloor x \rfloor}$.

1. Déterminer le domaine de définition de f et tracer l'allure de son graphe.
2. Étudier les bornes inférieure et supérieure de f.

Exercice 9

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, n^2 divise $(n+1)^n - 1$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $3^{2n+1} + 2^{n+2}$ est un multiple de 7.

Exercice 10 Soit n un entier naturel non nul.

1. Quels sont les restes possibles dans la division euclidienne de n par 6 ?
2. Montrer que $n(2n+1)(7n+1)$ est un multiple de 6.

Exercice 11 Déterminer le PGCD et le PPCM de a et b :

1. $a = 598$ et $b = 84$ 2. $a = 679949$ et $b = 5760649$ 3. $a = 10^n$ et $b = 9$, $n \in \mathbb{N}^*$

Exercice 12 Montrer que

1. $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel. 2. $\ln(2)/\ln(3)$ est irrationnel.

Exercice 13 Déterminer les couples (x,y) d'entiers relatifs vérifiant :

$$13x - 8y = 1 \text{ (on cherchera une solution particulière).}$$

Exercice 14

1. Montrer que si un entier b divise un entier a alors $2^b - 1$ divise $2^a - 1$.
2. En déduire que si $2^a - 1$ est premier alors a est premier. Étudier la réciproque.