Suites numériques

1 Définition et comportement global d'une suite réelle

Définition 1. Une suite réelle u est une fonction définie sur $\mathbb{N}$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$:

$$u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R} \\ n \longmapsto u(n) = u_n \end{array} \right. .$$

On appelle **terme général** de la suite u, le terme u_n de rang $n \in \mathbb{N}$ quelconque.

Notations : Une suite u peut être notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ou simplement (u_n). Si elle n'est définie qu'à partir du rang n_0, on la note $(u_n)_{n\geq n_0}$. L'ensemble des suites réelles est $\mathscr{F}(\mathbb{N},\mathbb{R})$ ou $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition 2. Soit (u_n) une suite réelle.

1. (u_n) est **majorée** s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \leq M$.
2. (u_n) est **minorée** s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N},\ u_n \geq m$.
3. (u_n) est **bornée** si elle est minorée et majorée.

Propriété 1. Une suite (u_n) est bornée ssi il existe un réel K positif tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n| \leq K$.

Exemple 1. La suite (u_n) est-elle bornée si : a) $u_n = n^2 - 3n$? b) $u_n = \dfrac{(-1)^n + 2}{3n}$?

Remarque : Si ils existent, le maximum, le minimum, la borne supérieure et la borne inférieure de (u_n) sont ceux de son image, $\mathrm{Im}(u) = \{u_n,\ n \in \mathbb{N}\}$.

Définition 3. Soit (u_n) une suite réelle, et $n_0 \in \mathbb{N}$.

1. (u_n) est **stationnaire** à partir du rang n_0 si $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} = u_n$.
2. (u_n) est **croissante** à partir du rang n_0 si $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \geq u_n$.
3. (u_n) est **décroissante** à partir du rang n_0 si $\forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n$.
4. (u_n) est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

Exemple 2. La suite (u_n) est-elle monotone si : a) $u_n = n^2 - 3n$? b) $u_n = 1 + \dfrac{5 \times (-1)^n}{n}$?

Définition 4. Soit (u_n) une suite réelle. On appelle suite **extraite** de (u_n) toute suite de la forme $(u_{\varphi(n)})$, où $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est une application strictement croissante.

Exemple 3. Soit (u_n), la suite de terme général $u_n = n^2 + (-1)^n$.

Expliciter le terme général des suites extraites (u_{2n}) (u_{3n+2}) et (u_{n^2}).

Remarque : Si $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est strictement croissante alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n) \geq n$.

2 Raisonnement par récurrence

Dans ce qui suit, $P(n)$ est une proposition dépendant de $n \in \mathbb{N}$.

Principe de récurrence simple On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. **Initialisation** $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** Pour tout entier $n \geq n_0$, $P(n) \Rightarrow P(n+1)$.

Selon le principe de récurrence (simple), on conclut que $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Principe de récurrence double On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. **Initialisation** $P(n_0)$ et $P(n_0 + 1)$ sont vraies.
2. **Hérédité** Pour tout entier $n \geq n_0$, $(P(n)$ et $P(n+1)) \Longrightarrow P(n+2)$.

Selon le principe de récurrence (double), on conclut que $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 4. $u_0 = 2$, $u_1 = 5$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 5u_{n+1} - 6u_n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = 2^n + 3^n$.

Principe de récurrence forte On montre qu'il existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que :

1. **Initialisation** $P(n_0)$ est vraie.
2. **Hérédité** Pour tout entier $n \geq n_0$, $\big(\forall k \in [\![n_0, n]\!], P(k)\big) \Rightarrow P(n+1)$.

Selon le principe de récurrence (forte), on conclut que $\forall n \geq n_0$, $P(n)$ est vraie.

Exemple 5. $u_1 = 3$ et $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = \dfrac{2}{n}(u_1 + \cdots + u_n)$. Exprimer u_n en fonction de $n \in \mathbb{N}^*$.

3 Suites usuelles définies par récurrence

Suite arithmétique (u_n) est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence d'ordre 1 de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + r$, où $r \in \mathbb{R}$ est la raison.

Dans ce cas, $\forall n \geq p, \quad u_n = u_p + (n-p)r \quad$ et $\quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = (n-p+1)\left(\frac{u_p+u_n}{2}\right)$.

Suite géométrique (u_n) est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence d'ordre 1 de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = q u_n, \quad$ où $\quad q \in \mathbb{R}$ est la raison.

Dans ce cas, $\forall n \geq p, \quad u_n = u_p q^{n-p} \quad$ et, si $q \neq 1, \quad \displaystyle\sum_{k=p}^{n} u_k = u_p\left(\frac{1-q^{n-p+1}}{1-q}\right)$.

Suite arithmético-géométrique (u_n) est définie par son premier terme u_0 et une relation de récurrence d'ordre 1 de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n + b, \quad$ où $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $a \neq 1$.

Dans ce cas, pour déterminer le terme général u_n :

1. On cherche la solution α de l'équation $ax + b = x$.
2. On pose $v_n = u_n - \alpha$ puis on montre que la suite (v_n) est géométrique de raison a.
3. On en déduit l'expression de v_n puis de u_n en fonction de n.

Remarque Cette méthode s'applique également pour les suites complexes définies par leur premier terme $u_0 \in \mathbb{C}$ et une relation de récurrence d'ordre 1 de la forme : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b, \quad$ où $\quad (a,b) \in \mathbb{C}^2$ et $a \neq 1$.

Exemple 6. Expliciter le terme général de la suite (u_n) définie par $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = 2u_n + 1$.

Suite récurrente linéaire d'ordre 2 (u_n) est définie par ses premiers termes u_0 et u_1 et une relation de récurrence d'ordre 2 : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad$ où $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \neq 0$.

Théorème 1. Soit (u_n) vérifiant $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+2} = a u_{n+1} + b u_n, \quad$ où $\quad (a,b) \in \mathbb{R}^2$ et $b \neq 0$.

On note (E_c) l'équation caractéristique $r^2 = ar + b$, d'inconnue $r \in \mathbb{C}$. Si (E_c) admet

• deux racines réelles simples r_1 et r_2, alors il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = A r_1^n + B r_2^n$$

• une racine réelle double r_0, alors il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (An + B) r_0^n$$

• deux racines complexes conjuguées $\rho e^{\pm i\theta}$, alors il existe $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ tel que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = \rho^n \left(A\cos(n\theta) + B\sin(n\theta)\right).$$

Exemple 7. Expliciter le terme général de (u_n) définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et

a) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = 2u_{n+1} - u_n$. b) $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = -u_{n+1} - u_n$.

4 Limite d'une suite réelle

4.1 Suite de limite finie

Définition 5. On dit que la suite réelle (u_n) **admet pour limite** $\ell \in \mathbb{R}$ si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow |u_n - \ell| \leq \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 8. Démontrer que la suite de terme général $u_n = 1 + \dfrac{5 \times (-1)^n}{n}$ admet pour limite 1.

Définition 6. On dit que la suite (u_n) est **convergente** s'il existe $\ell \in \mathbb{R}$ tel que $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Sinon, on dit que (u_n) est divergente.

Propriété 2. Soit (u_n) une suite réelle, et $\ell \in \mathbb{R}$.

1. Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique. Dans ce cas, on note $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$.
2. Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.

Exemple 9. Démontrer que la suite de terme général $u_n = \cos\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$ diverge.

Propriété 3. Soit (u_n) une suite réelle.

1. Si (u_n) converge vers $\ell \in \mathbb{R}$ alors (u_n) est bornée. **La réciproque est fausse.**
2. Si (u_n) converge vers $\ell \neq 0$ alors (u_n) est du signe de ℓ à partir d'un certain rang.

4.2 Suite de limite infinie

Définition 7. On dit que la suite réelle (u_n) admet pour limite $+\infty$ si

$$\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \geq A.$$

Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.

De même, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ si $\forall A \in \mathbb{R},\ \exists n_0 \in \mathbb{N},\ \forall n \in \mathbb{N},\ n \geq n_0 \Longrightarrow u_n \leq A$.

Remarques : Une suite (u_n) qui admet pour limite $\pm\infty$ est divergente.
Une suite qui diverge vers $+\infty$ n'est pas majorée et est positive à partir d'un certain rang.

Une suite qui diverge vers $-\infty$ n'est pas minorée et est négative à partir d'un certain rang.
Si (u_n) a une limite infinie, alors cette limite est unique et toute suite extraite admet la même limite.

Exemple 10. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = q^n$, où $q > 1$.

5 Limites usuelles, opérations et compositions

Propriété 4. Soit $\alpha > 0$.

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n!} = 0$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = \lim_{n\to+\infty} n = \lim_{n\to+\infty} n^\alpha = \lim_{n\to+\infty} n! = +\infty.$

Propriété 5. Soit $q \in \mathbb{R}$.

1. Si $-1 < q < 1$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si $q > 1$ alors $q^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $q \leq -1$ alors (q^n) n'admet pas de limite. Si $q = 1$ alors $\forall n \in \mathbb{N}$, $q^n = 1$.

Limite d'une somme

Limite de u_n	ℓ	ℓ	ℓ	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Limite de v_n	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Limite de $u_n + v_n$	$\ell + \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	**F.I.**

Limite d'un produit

Limite de u_n	ℓ	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$\ell > 0$	$\ell < 0$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0	0
Limite de v_n	ℓ'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
Limite de $u_n \times v_n$	$\ell \times \ell'$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	**F.I.**	**F.I.**

Limite d'un quotient

Limite de u_n	ℓ	$\ell \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	ℓ	ℓ	$\pm\infty$	0
Limite de v_n	$\ell' \neq 0$	0	ℓ'	ℓ'	$+\infty$	$-\infty$	$\pm\infty$	0
Limite de u_n/v_n	ℓ/ℓ'	$\pm\infty$	$\pm\infty$	$\pm\infty$	0	0	**F.I.**	**F.I.**

Exemple 11. Calculer la limite de (u_n) si : a) $\displaystyle u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{3}{2^k}$ b) $\displaystyle u_n = \frac{3n^2 + n}{\sqrt{n} + 5}$.

Propriété 6. Croissances comparées Pour tous réels $\alpha > 0$, $\gamma > 0$ et $q > 1$ on a :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln^\gamma(n)}{n^\alpha} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{q^n} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{q^n}{n!} = 0 \text{ et } \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{n!} = 0.$$

Propriété 7. Composition Soit $f : I \to \mathbb{R}$, (u_n) à valeurs dans I et $a, b \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$.

$$\text{Si } u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} a \text{ et } f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} b \text{ alors } f(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} b.$$

Exemple 12. Calculer la limite de (u_n) si : a) $u_n = 2\ln(n) - \ln(n+1)$ b) $u_n = \dfrac{2^n \ln(n)}{n!}$.

6 Limites et inégalités

6.1 Limites et comparaisons

Théorème 2. Passage à la limite dans une inégalité large Soit $(\ell, \ell') \in \mathbb{R}^2$.

Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors $\ell \leq \ell'$.

Théorème 3. des gendarmes Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

Soient (u_n), (v_n), (w_n) réelles telles que $v_n \leq u_n \leq w_n$ à partir d'un certain rang.

Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $w_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

Exemple 13. Déterminer la limite de la suite de terme général $u_n = \dfrac{n + \cos(n)}{n+1}$.

Théorème 4. Soient (u_n), (v_n) deux suites réelles telles que $u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ alors $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$ alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.

Exemple 14. On considère la suite (u_n) de terme général $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

Démontrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1}{k} \geq \ln(k+1) - \ln(k)$. En déduire que (u_n) diverge vers $+\infty$.

6.2 Limites et suites monotones

Théorème 5. de la limite monotone Toute suite réelle monotone admet une limite :

1. Si (u_n) est croissante non majorée alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
2. Si (u_n) est décroissante non minorée alors $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} -\infty$.
3. Si (u_n) est croissante majorée alors (u_n) converge vers un réel ℓ.
4. Si (u_n) est décroissante minorée alors (u_n) converge vers un réel ℓ.

Exemple 15. Étudier la limite de (u_n) définie par :

a) $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = \dfrac{2u_n + 1}{u_n + 2}$ b) $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = (u_n)^2 + u_n$.

Propriété 8. Soit $f : I \to I$ et (u_n) définie par $u_0 \in I$ et $\forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+1} = f(u_n)$.

Si (u_n) converge vers $\ell \in I$ et si f est continue sur I alors $\ell = f(\ell)$.

6.3 Limites et suites adjacentes

Définition 8. Deux suites réelles (u_n) et (v_n) sont dites **adjacentes** si l'une est croissante, l'autre décroissante et $u_n - v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Théorème 6. des suites adjacentes Si (u_n) et (v_n) sont adjacentes alors (u_n) et (v_n) convergent et ont la même limite $\ell \in \mathbb{R}$.
De plus, pour tout $n \in \mathbb{N}$, le réel ℓ est compris entre u_n et v_n.

Exemple 16. On pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}$ et $v_n = u_n + \dfrac{1}{n}$.
Montrer que (u_n) converge et trouver une approximation de sa limite à 10^{-2} près.

7 Suites complexes

Définition 9. Une **suite complexe** est une application $u : \left| \begin{array}{l} \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{C} \\ n \longmapsto u(n) = u_n \end{array} \right.$, notée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

• On dit que (u_n) est **bornée** si $\exists K \in \mathbb{R}_+,\ \forall n \in \mathbb{N},\ |u_n| \leq K$.

• On dit que (u_n) **a pour limite** $\ell \in \mathbb{C}$ si $|u_n - \ell| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Dans ce cas, on note $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$.

• On dit que (u_n) est **convergente** si $\exists \ell \in \mathbb{C}$, $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$. Sinon, elle est divergente.

Propriété 9. Soit (u_n) une suite complexe.

1. Si (u_n) converge alors sa limite ℓ est unique.
2. Si (u_n) converge vers ℓ alors toute suite extraite de (u_n) converge vers ℓ.
3. Si (u_n) converge alors (u_n) est bornée.

Propriété 10. Opérations sur les limites Soient (u_n) et (v_n) deux suites complexes.

1. $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \quad$ ssi $\quad \mathrm{Re}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Re}(\ell) \quad$ et $\quad \mathrm{Im}(u_n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathrm{Im}(\ell)$.
2. Si $u_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell$ et $v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell'$ alors :

$$u_n + v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell + \ell', \quad u_n \times v_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \ell \times \ell' \quad \text{et, si } \ell' \neq 0, \quad \frac{u_n}{v_n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{\ell}{\ell'}.$$

Exemple 17. On pose $z_n = 1 - \dfrac{2}{n} + \mathrm{i}\left(2 + \dfrac{1}{n^2}\right)$.
Démontrer que la suite (z_n) converge.