# Suites numériques

**Exercice 1** Étudier la monotonie de la suite $(u_n)$ de terme général $u_n = \begin{pmatrix} 2n \\ n \end{pmatrix}$.

**Exercice 2** On pose $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n + 2n - 1$.

1. Écrire une fonction Python d'argument $n$ retournant le terme $u_n$.
2. Déterminer l'expression de $u_n$ en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

**Exercice 3** On pose $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

1. Montrer que l'on définit ainsi une suite de nombres entiers.
2. Écrire une fonction Python d'argument $n$ retournant le terme $u_n$.
3. Montrer que pour tout entier naturel $n$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$.

**Exercice 4** Soit $(u_n) \in (\mathbb{R}_+^*)^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} u_k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} u_k\right)^2$.
Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = n$.

**Exercice 5** On considère la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{5u_n - 1}{u_n + 3}$.

1. Démontrer que la suite $(u_n)$ est bien définie, à valeurs dans $]1;2]$ et monotone.
2. On pose $v_n = (u_n - 1)^{-1}$.
   (a) Démontrer que la suite $(v_n)$ est arithmétique.
   (b) En déduire le terme général et la limite de $(u_n)$.

**Exercice 6** On considère la suite $(v_n)$ définie par $v_0 = \dfrac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 - v_n^2$.

1. Soient les fonction $f : x \mapsto 1 - x^2$ et $g = f \circ f$.
   Dresser le tableau de variation de $g$ sur $[0;1]$.
2. Justifier que $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_{2n+2} = g(v_{2n})$.
   En déduire que la suite $(v_{2n})$ est décroissante et convergente.
3. Étudier, de même, la monotonie et la convergence de la suite $(v_{2n+1})$.
4. Déduire de ce qui précède que la suite $(v_n)$ n'est ni monotone, ni convergente.

**Exercice 7** Soit $\theta \in \mathbb{R}$.
Déterminer, suivant la valeur de $\theta$, le terme général de la suite $(u_n)$ définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+2} - 2\cos(\theta)u_{n+1} + u_n = 0$.

**Exercice 8** Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)$ définie par :

1. $u_0 \in ]1, +\infty[$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{\ln(u_n)}$  2. $u_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n^3 + 6u_n}{3u_n^2 + 2}$

**Exercice 9** Les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont définies par $u_0 = 2$, $v_0 = 10$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{5u_n + 3v_n}{8} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}$$

1. Montrer que les suites $(u_n)$ et $(v_n)$ sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?
2. Écrire une fonction Python d'argument $n$ retournant une valeur approchée de $\ell$ à $10^{-n}$ près.
3. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $t_n = 4u_n + 3v_n$. Montrer que $(t_n)$ est constante.
4. Que peut-on en déduire ?

**Exercice 10**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, montrer que l'équation $x^5 + nx - 1 = 0$ admet une unique solution $x_n$ dans $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $(x_n)$ est décroissante, convergente et déterminer sa limite.

**Exercice 11** Étudier la convergence des suites suivantes :

1. $a_n = \sin\left(\dfrac{n\pi}{2}\right)$  $b_n = n \sin\left(\dfrac{1}{n}\right)$  $c_n = \dfrac{n + \cos(n\pi)}{2n - (-1)^n}$
2. $d_n = \dfrac{2n^2 - 3n + 1}{5n^3 - 4n + 7}$  $e_n = \dfrac{3^n - 5^n}{2^n + 1}$  $f_n = \sqrt{3n^2 + 2n + 5} - \sqrt{3n^2 + 1}$
3. $g_n = n^{\frac{1}{n^2}} - 1$  $h_n = \dfrac{n - 3^n}{n! + 1}$  $k_n = \left(\dfrac{n-1}{n+1}\right)^n$.