Correction du devoir maison n° 3

Soit $f : x \mapsto \text{cotan}\,(x) = \dfrac{\cos(x)}{\sin(x)}$

1. (a) $\sin(x) = 0 \iff \exists k \in \mathbb{Z}, x = k\pi$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$.

   (b) Les fonctions cos et sin étant respectivement paire et impaire, on a

   $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$:

   $-x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et $f(-x) = \dfrac{\cos(-x)}{\sin(-x)} = \dfrac{\cos(x)}{-\sin(x)} = -f(x)$. Donc f est impaire.

   (c) $\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$, $x + \pi \in \mathbb{R}\backslash\{k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$ et
   $f(x+\pi) = \dfrac{\cos(x+\pi)}{\sin(x+\pi)} = \dfrac{-\cos(x)}{-\sin(x)} = f(x)$. Donc f est π-périodique.

   (d) Comme f est π périodique, on peut l'étudier sur un intervalle d'amplitude π, par exemple $[\pi/2, 0[\, \cup\,]0, \pi/2]$ et comme elle est impaire, il suffit de l'étudier sur $]0, \pi/2]$.

2. (a) $\lim\limits_{x\to 0^+} \cos(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \sin(x) = 0^+$ donc $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$, par opérations sur les limites. On en déduit que

   la droite d'équation $x = 0$ est asymptote verticale à la courbe de f.

   (b) Sur $]0, \pi/2]$, f est dérivable comme quotient de fonctions dérivables dont le dénominateur ne s'annule pas, et $\forall x \in]0, \pi/2]$:

   $$f'(x) = \frac{\cos'(x)\sin(x) - \sin'(x)\cos(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-\sin^2(x) - \cos^2(x)}{\sin^2(x)} = \frac{-1}{\sin^2(x)} < 0.$$

   Donc f est strictement décroissante sur $]0, \pi/2]$.

   Comme $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, on a :

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	$\|\|$	$-$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0

3. (a) Comme $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = -1$, la courbe de f admet une tangente T en son point d'abscisse $\dfrac{\pi}{2}$, d'équation $T : y = -x + \dfrac{\pi}{2}$.

(b) Pour étudier la position relative de la courbe de f et de cette tangente, on étudie le signe de la fonction d définie sur $]0, \pi/2]$ par $d(x) = f(x) - \left(-x + \frac{\pi}{2}\right)$. Sur $]0, \pi/2]$, d est dérivable comme somme de fonctions dérivables et on a :

$d'(x) = f'(x) + 1 = \dfrac{\sin^2(x) - 1}{\sin^2(x)} \leq 0$, car $\sin^2(x) \leq 1$. Donc d est décroissante sur $]0, \pi/2]$.

(c) Comme $d\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$, $d \geq 0$ sur $]0, \pi/2]$ et

la courbe de f est au-dessus de T sur $]0, \pi/2]$.

4. On trace l'allure du graphe de f sur $]0, \pi/2]$, puis on le complète par symétrie par rapport à l'origine du repère, puis par translations de vecteurs $\vec{u} = (-\pi, 0)$ et $\vec{v} = (\pi, 0)$.