Exercice 1 1. Montrer que l'application f définie de $\mathbb{C} \setminus \{\mathrm{i}\}$ dans $\mathbb{C} \setminus \{1\}$ par $f(z) = \dfrac{z+\mathrm{i}}{z-\mathrm{i}}$ est bijective et déterminer sa réciproque.

2. Soit $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (2x+y, x^2) \end{array} \right.$

L'application f est-elle injective ? surjective ? bijective ?

Exercice 2 En utilisant la méthode du pivot de Gauss et en discutant selon la valeur du paramètre réel t, résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S_t) :

$$(S_t) \left\{ \begin{array}{l} x+y+z = 1-t \\ tx + (1+t)y + (1+t)z = t(1-t) \\ tx + (1-t)y + (1-t)z = t^2 \end{array} \right.$$

Exercice 3 1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $y'' - 2ay' + y = e^x$ selon les valeurs du paramètre a.

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation différentielle $y'' - 2y' + 5y = \mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ puis en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y'' - 2y' + 5y = -4\mathrm{e}^{-x}\cos x + 7\mathrm{e}^{-x}\sin x - 4\mathrm{e}^{x}\sin(2x)$

Exercice 4 $A_n = \displaystyle\sum_{1 \leq i,j \leq n} \min(i,j)$