Exercice 2 $(S_t)\begin{cases} x+y+z=1-t \\ tx+(1+t)y+(1+t)z=t(1-t) \\ tx+(1-t)y+(1-t)z=t^2 \end{cases} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x+y+z & =1-t & \\ \quad y+z & =0 & L_2-tL_1\to L_2 \\ \quad (1-2t)y+(1-2t)z & =-t(1-2t) & L_3-tL_1\to L_3 \end{cases}$$

Si $t=\dfrac{1}{2}$, $(S_t)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=\frac{1}{2} \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{1}{2} \\ y=-z \end{cases}$. $\mathcal{S}=\left\{\left(\dfrac{1}{2},-z,z\right),z\in\mathbb{R}\right\}$

Si $t\neq\dfrac{1}{2}$, $(S_t)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=1-t \\ y+z=0 \\ y+z=-t \end{cases}$

si $t\neq 0$, $\mathcal{S}=\emptyset$

si $t=0$, $(S_t)\Leftrightarrow\begin{cases} x+y+z=1 \\ y+z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \quad =1 \\ y=-z \end{cases}$. $\mathcal{S}=\{(1,-z,z),z\in\mathbb{R}\}$

Exercice 3

2. Résoudre sur $\mathbb{C}$ l'équation différentielle$y''-2y'+5y=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$ puis en déduire les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation $y''-2y'+5y=-4\mathrm{e}^{-x}\cos x+7\mathrm{e}^{-x}\sin x-4\mathrm{e}^{x}\sin(2x)$

L'équation caractéristique est $r^2-2r+5=0$, dont les racines sont $1+2\mathrm{i}$ et $1-2\mathrm{i}$.

La solution générale de l'équation homogène sur $\mathbb{C}$ est donc donnée par

$y_H(x)=A\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}+B\mathrm{e}^{(1-2\mathrm{i})x}$, avec $A,B\in\mathbb{C}$.

Solution particulière de $y''-2y'+5y=\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$:

Comme $-1+\mathrm{i}$ n'est pas racine de l'équation caractéristique, on cherche une fonction de la forme $y_P(x)=a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}$

On trouve, en dérivant et en utilisant l'équation $((-1+\mathrm{i})^2 - 2(-1+\mathrm{i}) + 5)a = 1$ d'où
$a = \dfrac{1}{7-4\mathrm{i}} = \dfrac{7+4\mathrm{i}}{65}$

Sur $\mathbb{R}$:

La solution générale de l'équation homogène est donc donnée par

$y_H(x) = A\mathrm{e}^x \cos(2x) + B\mathrm{e}^x \sin(2x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Une solution particulière de $y'' - 2y' + 5y = -4\mathrm{e}^{-x}\cos x + 7\mathrm{e}^{-x}\sin x$ est alors donnée par

$-4\ \mathrm{Re}(a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) + 7\mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) = -4\ \mathrm{Im}\ (\mathrm{i}a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) + 7\ \mathrm{Im}(a\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) =$
$\mathrm{Im}((-4\mathrm{i}+7)\dfrac{1}{7-4\mathrm{i}}\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) = \mathrm{Im}(\mathrm{e}^{(-1+\mathrm{i})x}) = \mathrm{e}^{-x}\sin x$.

On cherche ensuite une solution particulière de l'équation $y'' - 2y' + 5y = -4\mathrm{e}^x \sin(2x)$.

On cherche de la même façon à résoudre $y'' - 2y' + 5y = -4\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$

Comme $1+2\mathrm{i}$ est solution de l'équation caractéristique, on va chercher une solution sous la forme $y_P(x) = ax\mathrm{e}^{(1+2\mathrm{i})x}$, dont on prendra ensuite -4 fois la partie imaginaire.

On trouve finalement que $x\mathrm{e}^x\cos(2x)$ est solution de $y'' - 2y' + 5y = -4\mathrm{e}^x\sin(2x)$.

Finalement, les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation de départ sont les fonctions

$y(x) = A\mathrm{e}^x\cos(2x) + B\mathrm{e}^x\sin(2x) + \mathrm{e}^{-x}\sin x + x\mathrm{e}^x\cos(2x)$, avec $A, B \in \mathbb{R}$.

Exercice 4 $\quad A_n = \displaystyle\sum_{1\le i,j\le n} \min(i,j) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i} j + \sum_{j=i+1}^{n} i\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{i(i+1)}{2} + (n-i)i\right)$
$= \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\left(-\frac{1}{2}i^2 + \left(n+\frac{1}{2}\right)i\right) = -\frac{1}{2}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$