Calcul matriciel et systèmes linéaires

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, et n, p et q des entiers naturels non nuls.

1 Ensembles de matrices

Définition 1. On appelle **matrice à n lignes et p colonnes** à coefficients dans $\mathbb{K}$, un tableau

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix},$$

où $a_{ij} \in \mathbb{K}$ est le **coefficient** de la i-ème ligne et de la j-ème colonne, noté aussi $[A]_{ij}$.

Une telle matrice est aussi notée $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$.

L'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
La matrice élémentaire E_{ij} est la matrice dont tous les coefficients valent 0 sauf le coefficient de la ligne i et de la colonne j qui vaut 1.

Remarque : Toute matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est égale à $\displaystyle\sum_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq p} a_{ij}E_{ij}$.

Cas particuliers :

1. Toute matrice de $\mathscr{M}_{1,p}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice ligne** (à p colonnes).
2. Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice colonne** (à n lignes).
3. Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$ est appelée **matrice carrée d'ordre** n.
   L'ensemble des matrices carrées d'ordre n est noté $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition 2. Soit $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n}} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. A est dite **triangulaire supérieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i > j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
2. A est dite **triangulaire inférieure** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i < j \Longrightarrow a_{ij} = 0$.
3. A est dite **diagonale** si $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, $i \neq j \Longrightarrow a_{ij} = 0$. Dans ce cas, on note

$$A = \mathrm{diag}(a_{1,1}, \ldots, a_{n,n}).$$

2 Opérations sur les matrices

2.1 Addition et multiplication par un scalaire

Définition 3. Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ deux matrices, et $\lambda \in \mathbb{K}$ un scalaire.

1. La somme de A et B est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée $A+B$, définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [A+B]_{ij} = [A]_{ij} + [B]_{ij}.$$
2. Le produit de A par λ est la matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, notée λA, définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!], \quad [\lambda A]_{ij} = \lambda [A]_{ij}.$$
3. On appelle **matrice nulle** de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice, notée 0_{np}, de coefficients tous nuls.

Propriété 1. Soient $A, B, C \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.

1. $A + (B + C) = (A + B) + C$ **Associativité**
2. $A + 0_{np} = 0_{np} + A = A$ **Élément neutre**
3. $A + (-1)A = (-1)A + A = 0_{n,p}$ **Élément opposé**
4. $A + B = B + A$ **Commutativité**
5. $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$ et $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$ (distributivité)

Remarque : l'opposé de A est noté $-A$ et la soustraction est définie par $A - B = A + (-B)$.

2.2 Multiplication matricielle

Définition 4. Soit $A \in \mathscr{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

Le produit de A par B est la matrice de $\mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K})$, notée AB, définie par :
$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,q]\!], \quad [AB]_{ij} = \sum_{k=1}^{p} [A]_{ik} \times [B]_{kj}.$$

Remarque : Le produit AB n'a un sens que si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Exemple 1. Calculer AB dans le cas où :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ -8 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -2 \end{pmatrix}$.

Propriété 2. Si les matrices A, B, C sont de tailles convenables et $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, alors

1. $A(BC) = (AB)C$ **Associativité**
2. $A \times (\lambda B + \mu C) = \lambda A \times B + \mu A \times C$ **Bilinéarité à droite**
3. $(\lambda A + \mu B) \times C = \lambda A \times C + \mu B \times C$ **Bilinéarité à gauche**

2.3 Cas des matrices carrées

Définition 5. On appelle **matrice identité d'ordre** n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, notée I_n, définie par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad [I_n]_{ij} = \delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad i = j \\ 0 & \text{si} \quad i \neq j \end{cases} \quad \textbf{Symbole de Kronecker}.$$

Propriété 3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et 0_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $AI_n = I_nA = A$ **Élément neutre**
2. $A0_n = 0_nA = 0_n$ **Élément absorbant**

Remarque : Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est possible de calculer AB et BA, mais cela ne donne pas le même résultat en général. Pour $n \geq 2$, le produit matriciel dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif.

De plus, on peut avoir AB nulle sans que A et B soient nulles. Pour $n \geq 2$, le produit matriciel dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas intègre.

Exemple 2. Calculer AB, BA et B^2 si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Définition 6. Pour $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, les puissances de A sont définies par récurrence :

$$A^0 = I_n \quad \text{et pour } k \in \mathbb{N}, \quad A^{k+1} = AA^k.$$

Exemple 3. (u_n) et (v_n) sont définies par $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} u_{n+1} = u_n - v_n \\ v_{n+1} = -u_n + v_n \end{cases}$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \end{pmatrix}$.
2. En déduire une expression de u_n et v_n en fonction de u_0, v_0 et n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exemple 4. Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Déterminer une condition suffisante pour que $(AB)^2 = A^2B^2$ et $(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$.

Théorème 1. Cas des matrices qui commutent

Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ commutent (c.à.d. $AB = BA$) alors $\forall p \in \mathbb{N}, \quad (AB)^p = A^pB^p$

et $\quad (A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \begin{pmatrix} p \\ k \end{pmatrix} A^k B^{p-k}$ **Formule du binôme**.

Exemple 5. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Calculer les puissances de B. En déduire celles de A.

Propriété 4. Cas des matrices triangulaires et diagonales Soient $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

1. Si A et B sont triangulaires supérieures (resp. inférieures) alors AB est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieure).
2. Si $A = \text{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ et $B = \text{diag}(\beta_1, \dots, \beta_n)$ alors

$$AB = BA = \text{diag}(\alpha_1\beta_1, \dots, \alpha_n\beta_n) \text{ et } \forall k \in \mathbb{N},\ A^k = \text{diag}(\alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k).$$

3 Opérations élémentaires de pivot et calcul matriciel

3.1 Matrices élémentaires

Définition 7. Soit λ un scalaire non nul. On appelle :

1. **matrice de permutation**, toute matrice $P_{ij} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftrightarrow L_j$ sur I_n
2. **matrice de dilatation**, toute matrice $D_i(\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow \lambda L_i$ sur I_n
3. **matrice de transvection**, toute matrice $T_{ij}(\lambda) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ obtenue en effectuant l'opération élémentaire $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$ sur I_n

Exemple 6. Calculer EA et dire à quelle opération élémentaire sur A ce produit correspond :

1. $E = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ 2. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Remarque : Effectuer une opération élémentaire sur les lignes d'une matrice revient à multiplier cette dernière à gauche par la matrice élémentaire correspondante. Aussi,

$$P_{ij}P_{ij} = I_n, \quad D_i(\lambda)D_i(1/\lambda) = I_n \quad \text{et} \quad T_{ij}(\lambda)T_{ij}(-\lambda) = I_n \text{ (si } i \neq j).$$

Les matrices élémentaires P_{ij}, $D_i(\lambda)$ et $T_{ij}(\lambda)$ sont dites inversibles et ont pour inverses les matrices élémentaires P_{ij}, $D_i(1/\lambda)$ et $T_{ij}(-\lambda)$ respectivement.

Remarque : Effectuer une opération élémentaire sur les colonnes d'une matrice revient à multiplier cette dernière à droite par une matrice élémentaire, obtenue en effectuant cette même opération élémentaire sur les colonnes de l'identité.

3.2 Écriture matricielle d'un système linéaire

Théorème 2. Soit le système de n équations linéaires à p inconnues

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p = b_2 \\ \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p = b_n \end{cases}.$$

Alors $(S) \Leftrightarrow AX = B$, où $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq p}}$ est la matrice des coefficients de (S), $X = (x_j)_{1\leq j\leq p}$ est la colonne de ses inconnues, et $B = (b_j)_{1\leq j\leq p}$ celle de ses seconds membres.

Exemple 7. Résoudre l'équation matricielle $AX = B$ dans le cas où :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \ X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Remarques $AX = \sum_{j=1}^{p} x_j C_j$ est une combinaison linéaire des colonnes C_j de A.

Théorème 3. Le système ci-dessus est compatible ssi B est une combinaison linéaire des colonnes de A.
L'écriture matricielle du système homogène (S_H) associé à (S) est $AX = 0_{n1}$.

Ainsi, si X_p est une solution particulière de (S), alors

$$AX = B \iff X = X_p + X_H, \quad X_H \text{ solution de } (S_H).$$

3.3 Matrice et matrice augmentée d'un système linéraire

Définition 8. Soit (S), un système linéaire de coefficients $a_{i,j}$, de seconds membres b_i et d'inconnues x_j, avec $(i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!]$.

On appelle **matrice augmentée** de (S) les tableaux de nombres respectifs

$$(A|B) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,p} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,p} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,p} & b_n \end{array}\right).$$

Remarque : Comme pour les systèmes linéaires, on peut définir les opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice. On dit alors que deux matrices A et A' sont équivalentes par lignes si elles se déduisent l'une de l'autre par une suite finie d'opérations élémentaires sur les lignes. Dans ce cas, on note $A \underset{L}{\sim} A'$.

Comme pour les systèmes linéaires, on définit la notion de pivot d'une matrice et la notion de matrice échelonnée.

Exemple 8. Déterminer une matrice échelonnée équivalente par lignes à $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 5 \\ 3 & 12 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Définition 9. Une matrice échelonnée par lignes est dite **échelonnée réduite par lignes** si elle est nulle ou si tous ses pivots sont égaux à 1 et si ses pivots sont les seuls éléments non nuls de leur colonne.

Exemple 9. Déterminer une matrice échelonnée réduite par lignes équivalente par lignes à

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 & 1 \\ 2 & 8 & 8 & 5 \\ 3 & 12 & 4 & 9 \\ 8 & 7 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Théorème 4. (admis)
Toute matrice est équivalente par lignes à une unique matrice échelonnée réduite par lignes.

Application : Algorithme de Gauss-Jordan pour obtenir l'échelonnée réduite par lignes de A :

1. on obtient une matrice A' échelonnée par lignes par l'algorithme du pivot de Gauss ;
2. on obtient des 0 au-dessus de chaque pivot par des transvections, en commençant par le dernier pivot en bas à droite ;
3. on remplace les pivots par des 1, par des dilatations.

Propriété 5. Si on passe d'un système linéaire (S) à un système linéaire (S') par une suite finie d'opérations élémentaires, la matrice augmentée de (S') se déduit de celle de (S) par la même suite d'opérations élémentaires.

Exemple 10. Résoudre le système (S) par application de l'algorithme de Gauss-Jordan sur sa matrice augmentée :

$$(S) : \left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & 4y & + & 7z & + & t & = & 1 \\ 2x & + & 8y & + & 8z & + & 5t & = & 1 \\ 3x & + & 12y & + & 9z & + & 9t & = & 1 \\ 2x & + & 7y & + & z & + & 4t & = & 1 \end{array}\right. .$$

4 Matrices carrées inversibles

4.1 Définition et produit de matrices inversibles

Définition 10. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

On dit que A est **inversible** si il existe une matrice $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $AB = BA = I_n$.

Dans ce cas, la matrice B est appelée matrice inverse de A.

L'ensemble des matrices inversibles de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est appelé groupe linéaire et noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 6. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet une matrice inverse alors elle est unique et notée A^{-1}.

Exemple 11. Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.

En déduire que A est inversible, puis calculer A^{-1}.

Théorème 5. Si $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ vérifient $AB = I_n$ alors $BA = I_n$.

Dans ce cas, A et B sont inversibles et inverses l'une de l'autre.

Propriété 7. Soient $A, B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}^*$.

1. λA est inversible, d'inverse $(\lambda A)^{-1} = \dfrac{1}{\lambda} A^{-1}$
2. AB est inversible, d'inverse $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$
3. $\forall k \in \mathbb{N}$, A^k est inversible, d'inverse $(A^k)^{-1} = (A^{-1})^k$, notée aussi A^{-k}.

4.2 Méthodes de calcul de l'inverse d'une matrice inversible

Théorème 6. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) A est inversible

(iii) le système $AX = 0_{n,1}$ admet pour unique solution $0_{n,1}$

(iv) pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet une unique solution

(v) pour tout $B \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$, le système $AX = B$ admet au moins une solution.

Application 1 : Pour inverser une matrice, on peut résoudre un système.

$$AX = B \Longleftrightarrow X = A^{-1}B.$$

Exemple 12. Inverser, si cela est possible, la matrice A :

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Application 2 : Pour inverser une matrice, on peut appliquer l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée $(A|I_n)$. Si on obtient une matrice augmentée de la forme $(I_n|E)$, alors A est inversible et $A^{-1} = E$. Sinon A n'est pas inversible.

Exemple 13. Inverser, si cela est possible, la matrice A :

$$\text{a)}\quad A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{b)}\quad A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Propriété 8. Cas des matrices triangulaires Une matrice triangulaire est inversible ssi tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Dans ce cas, l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure ou inférieure est respectivement triangulaire supérieure ou inférieure.

Propriété 9. Cas des matrices diagonales Soit $A = \mathrm{diag}(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ une matrice diagonale.

A est inversible ssi $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\alpha_i \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \mathrm{diag}\left(\dfrac{1}{\alpha_1}, \dots, \dfrac{1}{\alpha_n}\right)$.

Théorème 7. Cas des matrices carrées d'ordre 2 Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{K})$.

La matrice A est inversible ssi $ad - bc \neq 0$. Dans ce cas, $A^{-1} = \dfrac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Remarque : Le scalaire $ad - bc$ est appelé déterminant de A et noté det (A) ou $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Exemple 14. Étudier l'inversibilité de $A = \begin{pmatrix} m-2 & -5 \\ 4 & m+2 \end{pmatrix}$, où $m \in \mathbb{C}$.

5 Opération de transposition d'une matrice

Définition 11. Soit $A \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle **transposée** de A la matrice, notée A^T (ou ${}^tA$), définie par $A^T \in \mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ et $\forall (i,j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!]$, $[A^T]_{i,j} = [A]_{j,i}$.

Exemple 15. Déterminer la transposée de A :

a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ b) $A = \mathrm{diag}\,(1, -2, 3)$ c) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Remarque : Les lignes de A^T sont les colonnes de A, et inversement.

Si A est une matrice diagonale alors $A^T = A$ (la réciproque est fausse).

Propriété 10. Si les matrices A et B sont de tailles convenables, si $\lambda \in \mathbb{K}$ et $k \in \mathbb{N}$ alors

1. $(A^T)^T = A$ 2. $(A+B)^T = A^T + B^T$ 3. $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ 4. $(AB)^T = B^T A^T$

5. $(A^k)^T = (A^T)^k$ 6. A est inversible ssi A^T est inversible. Dans ce cas $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Définition 12. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **symétrique** si $A^T = A$.
A est dite **antisymétrique** si $A^T = -A$.
On note $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices symétriques et $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices antisymétriques.