Calcul matriciel et systèmes linéaires

Exercice 1 Calculer, si c'est possible, les produits AB et BA :

1. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -3 & 6 \\ 1 & -4 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$ 2. $A = \begin{pmatrix} 6 & 8 & 5 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

$A = \begin{pmatrix} 5 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note J_n la matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1.

1. (a) Exprimer $(J_2)^2$ en fonction de J_2.
   (b) En déduire la matrice $(J_2)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. Reprendre les questions précédentes dans le cas où $n \in \mathbb{N}^*$ est quelconque.

Exercice 3 Les suites (u_n) et (v_n) sont définies par $\begin{cases} u_0 & = & 1 \\ v_0 & = & \dfrac{1}{2} \end{cases}$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$\begin{cases} u_{n+1} & = & 2u_n + v_n \\ v_{n+1} & = & u_n + 2v_n \end{cases}$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on on pose $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $X_n = A^n X_0$, où $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est à préciser.
2. En déduire l'expression du terme général de chacune des suites (u_n) et (v_n).

Exercice 4 Soient $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $M = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

1. Calculer N^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En déduire M^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. Déterminer les matrices qui commutent avec N.

Exercice 5 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Exprimer A^2 en fonction de A et I_3.
2. Montrer que pour tout n de $\mathbb{N}$, il existe deux réels a_n et b_n tels que $A^n = a_n A + b_n I_3$.
3. Déterminer a_n, b_n puis A^n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 6 Calculer l'inverse des matrices suivantes :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, a \in \mathbb{C}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad A_6 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \mathrm{i} & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7 Soit $(A, B) \in (\mathscr{S}_n(\mathbb{K}))^2$. Montrer que AB est symétrique ssi A et B commutent.

Exercice 8 Soient $A, B \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Montrer que $A = B$ ssi $\forall X \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$, $AX = BX$.

Exercice 9 Soit $P = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $D = \mathrm{diag}(1, 1, -2)$.

1. Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
2. On pose $A = PDP^{-1}$. Montrer que A et inversible et calculer A^n en fonction de $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 10 Résoudre les systèmes en utilisant la notation matricielle et l'algorithme de Gauss Jordan.

1. $\begin{cases} x - y + 3z = -4 \\ 2x + y - z = 5 \\ -2x + y - 2z = 2 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x - 4y + z = 6 \\ x + 2y - 2z = 1 \\ x - 8y + 5z = 4 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} x - y + z + t & = -2 \\ 3x - 3y + 3z + 2t & = -5 \\ x - y + z & = -1 \\ 5x - 5y + 5z + 7t & = -12 \end{cases}$

Exercice 11 Pour chaque système, montrer que le quadruplet P est une solution particulière du système, puis résoudre le système homogène et enfin donner la solution générale du système.

1. $\begin{cases} 3x - y + z - t = 5 \\ 2x + y + 2z + t = 6 \\ 4x - 3y - 3t = 4 \end{cases}$ et $P = (1, -1, 2, 1)$. 2. $\begin{cases} 3x - 2y - 3z - t = 8 \\ x - 4y + z + t = 0 \\ -x - y + 2z + t = -4 \\ -x - 6y + 5z + 3t = -8 \end{cases}$ et $P = (3, 1, -1, 2)$.

Exercice 12 Inverser les matrices en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

1. $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -3 & 2 & -5 \\ 6 & -5 & 10 \end{pmatrix}$ 2. $\begin{pmatrix} 3 & -7 & -9 \\ 1 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ 3. $\begin{pmatrix} 5 & 2 & 9 \\ 6 & 1 & 9 \\ 15 & 2 & 22 \end{pmatrix}$