Devoir maison n$^{\text{o}}$ 10

A rendre le jeudi 21 décembre 2023

Exercice 1 On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

On note I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Calculer A^2.
   (b) Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.
   (c) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

2. (a) Trouver une matrice J telle que $A = I_3 + J$.
   (b) Calculer J^2.
   (c) Montrer par récurrence que $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
   (d) Donner une expression simplifiée de la somme $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En déduire que $A^n = \dfrac{1}{3}\left(4^n - 1\right) J + I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

4. Cette formule est-elle également valable pour $n = -1$?

Exercice 2 Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère le système

$$(S) \left\{ \begin{array}{ccccccc} x & - & my & + & z & = & 2 \\ mx & + & y & - & z & = & 1-m \\ mx & - & m^2y & + & z & = & 2 \\ x & - & my & + & z & = & m^2+1 \end{array} \right. , \text{ d'inconnues } x, y, z.$$

1. Déterminer l'ensemble des valeurs de m pour lesquelles le système (S) est incompatible.

2. Pour chaque valeur de m pour laquelle (S) est compatible, déterminer l'ensemble de ses solutions.