Correction du devoir maison n$^{\text{o}}$ 10

Exercice 1 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ et I_3 la matrice identité d'ordre 3.

1. (a) Calculer A^2.

   $A^2 = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 5 \\ 5 & 6 & 5 \\ 5 & 5 & 6 \end{pmatrix}$

   (b) Trouver deux nombres $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $A^2 = aA + bI_3$.

   $A^2 = 5A - 4I_3$.

   (c) En déduire que A est inversible et expliciter son inverse.

   Donc $A\left(-\frac{1}{4}(A - 5I_3)\right) = I$ donc A est inversible et son inverse est

   $A^{-1} = \left(-\frac{1}{4}(A - 5I_3)\right) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

2. Rappeler l'énoncé précis de la formule du binôme de Newton pour les matrices.

   Étant données deux matrices carrées B et D de même dimension qui commutent (c'est-à-dire que $BD = DB$), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(B + D)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B^k D^{n-k}$.

3. (a) Trouver une matrice J telle que $A = I_3 + J$.

   $J = A - I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Calculer J^2.

   $J^2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{pmatrix} = 3J$

   (c) Montrons par récurrence que $\mathcal{P}_k$: « $J^k = 3^{k-1}J$ » est vraie pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   Initialisation : pour $k = 1$, $J^1 = J = 3^0 J$ donc $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : on suppose que $\mathcal{P}_k$ est vraie c'est-à-dire que $J^k = 3^{k-1}J$.

   Alors $J^{k+1} = J \times J^k = J \times 3^{k-1}J = 3^{k-1}J^2 = 3^{k-1} \times 3J = 3^k J$, donc $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

   Conclusion : D'après le principe de récurrence, $J^k = 3^{k-1}J$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

   (d) Donner une expression simplifiée de la somme $\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1}$, où $n \in \mathbb{N}^*$.

   $$\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^k 1^{n-k} = \frac{1}{3}\left((3+1)^n - 1\right) = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right).$$

4. En déduire que $A^n = \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right) J + I_3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

$A^n = (I_3 + J)^n$, or les matrices I_3 et J commutent, donc :
$A^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} J^k = I_3 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 3^{k-1} J = I_3 + \frac{1}{3}\left(4^n - 1\right) J.$

5. Cette formule est-elle également valable pour $n = -1$?
   Pour $n = -1$, on obtient $I_3 + \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4} - 1\right) J = I_3 - \dfrac{1}{4} J = I_3 - \dfrac{1}{4}(A - I) = \dfrac{5}{4} I_3 - \dfrac{1}{4} A$ qui est bien égal à A^{-1}, la formule reste donc vraie.

Exercice 2

1. Soit $m \in \mathbb{R}$. On applique l'algorithme de Gauss-Jordan à la matrice augmentée de (S) :

$$(A|B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ m & 1 & -1 & 1-m \\ m & -m^2 & 1 & 2 \\ 1 & -m & 1 & m^2+1 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -m & 1 & 2 \\ 0 & 1+m^2 & -1-m & 1-3m \\ 0 & 0 & 1-m & 2(1-m) \\ 0 & 0 & 0 & m^2-1 \end{array}\right),$$

par les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow L_2 - mL_1$, $L_3 \leftarrow L_3 - mL_1$ et $L_4 \leftarrow L_4 - L_1$.

Si $m \notin \{-1, 1\}$, le système (S) est incompatible et l'ensemble des solutions est $S = \emptyset$.

2. Si $m = 1$, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$ et $L_1 \leftarrow L_1 + L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } (S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & 1 \\ y - z & = & -1 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 2, d'inconnues principales x et y, et de paramètre z. Il admet une infinité de solutions et $\boxed{S = \{(1, -1+z, z),\ z \in \mathbb{R}\}}$.

Si $m = -1$, en effectuant les opérations élémentaires $L_2 \leftarrow \frac{1}{2} L_2$, $L_3 \leftarrow \frac{1}{2} L_3$, $L_1 \leftarrow L_1 - L_3$ puis $L_1 \leftarrow L_1 - L_2$, on a :

$$(A|B) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \underset{L}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \text{ et } (S) \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2 \\ y & = & 2 \\ z & = & 2 \end{array}\right. .$$

Dans ce cas, le système (S) est de rang 3, d'inconnues principales x, y et z. Il admet une unique solution et $\boxed{S = \{(-2, 2, 2)\}}$.