Correction du Test n° 12

Sujet A

1.

2. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. (a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Conjecture : $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

   I : Pour $n = 0, A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pou $n = 0$

   H : Supposons que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ à un rang n.

   On a alors $A^{n+1} = A^n \times A = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & n+1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

   C : On a montré par récurrence que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

3. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) \end{cases}$

   (a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 3v_n) - \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) = \dfrac{1}{12}(v_n - u_n)$ donc la suite (w_n) est géométrique, de raison $\dfrac{1}{12}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

   $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 0$ car $-1 < \dfrac{1}{12} < 1$.

   (b) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) - u_n = \dfrac{2}{3}(v_n - u_n) = \dfrac{2}{3}\,w_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

   $v_{n+1} - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n + 3v_n) - v_n = \dfrac{1}{4}(u_n - v_n) = \dfrac{1}{4}\,w_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) est décroissante.

   Les suites (u_n) et (v_n) sont alors adjacentes, elle convergent vers une même limite ℓ.

Correction du Test n° 12

Sujet B

1.

2. Soit $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (a) $B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

   (b) Conjecture : $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

   I : Pour $n = 0, B^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pou $n = 0$

   H : Supposons que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ à un rang n.

   On a alors $B^{n+1} = B^n \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n+1 & 1 \end{pmatrix}$

   C : On a montré par récurrence que $B^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$ pour tout entier n.

3. On définit deux suites (u_n) et (v_n) par : $u_0 = 1$, $v_0 = 2$ et $\begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{3}(2u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{3}(u_n + 2v_n) \end{cases}$

   (a) $w_{n+1} = v_{n+1} - u_{n+1} = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - \frac{1}{3}(2u_n + v_n) = \frac{1}{3}(v_n - u_n)$ donc la suite (w_n) est géométrique, de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme $w_0 = 1$.

   $\lim\limits_{n \to +\infty} w_n = 0$ car $-1 < \frac{1}{3} < 1$.

   (b) $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(2u_n + v_n) - u_n = \frac{1}{3}(v_n - u_n) = \frac{1}{3}\, w_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc (u_n) est croissante.

   $v_{n+1} - v_n = \frac{1}{3}(u_n + 2v_n) - v_n = \frac{1}{3}(u_n - v_n) = -\frac{1}{3}\, w_n < 0, \forall n \in \mathbb{N}$ donc (v_n) est décroissante.

   Les suites (u_n) et (v_n) sont alors adjacentes, elle convergent vers une même limite ℓ.