Correction du devoir surveillé $n°3$

Exercice $n°1$ (Calcul algébrique & application) (5 points:1) 2.5 2) 1+3x0.5)

1. $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{i}(i-j)+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)\right)$$

   $$\sum_{j=1}^{i}(i-j)+\sum_{j=i+1}^{n}(j-i)=i^2-\frac{i(i+1)}{2}+\frac{(n+i+1)(n-i)}{2}-i(n-i)$$
   $$=\frac{1}{2}\left(i^2-i+n^2-i^2+n-i-2ni+2i^2\right)=i^2+(-1-n)i+\frac{n(n+1)}{2}$$

   donc

   $$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+\frac{(-1-n)n(n+1)}{2}+\frac{n^2(n+1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}\frac{(2n-2)}{3}$$
   $$\boxed{\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=\frac{n(n+1)(n-1)}{3}}$$

   Correction 2 $|i-j|=|j-i|$ donc $\displaystyle\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n}|i-j|=2\sum_{1\leqslant j<i\leqslant n}(i-j)$

2. On considère l'application $\phi:\mathbb{C}\backslash\{-3\}\to\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$ qui à z associe $\phi(z)=\dfrac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z+3}$.

   Soit $\omega\in\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$, pour tout $z\neq-3$

   $$\omega=\frac{\mathrm{i}z-\mathrm{i}}{z+3}\Leftrightarrow(z+3)\omega=\mathrm{i}z-\mathrm{i}\Leftrightarrow z(\omega-\mathrm{i})=-3\omega-\mathrm{i}\Leftrightarrow z=\frac{3\omega+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-\omega}\ \omega\neq\mathrm{i}$$

   donc l'équation $\omega=\phi(z)$ admet une unique solution pour tout $\omega\in\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$ et $z\in\mathbb{C}\backslash\{-3\}$

   ce qui signifie que ϕ est bijective de $\mathbb{C}\backslash\{-3\}$ sur $\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}$ et son application réciproque est

   $$\boxed{\phi^{-1}:\mathbb{C}\backslash\{\mathrm{i}\}\to\mathbb{C}\backslash\{-3\}\text{ qui à } z \text{ associe } \phi^{-1}(z)=\frac{3z+\mathrm{i}}{\mathrm{i}-z}}$$

Exercice n ° 2 (Pivot de Gauss) (5 points: 1) 1.5 2) 1.5 3) 2)

$$(S_{a,b}):\left\{\begin{array}{ccccccccc} x & + & y & + & az & = & 1 & L_1 \\ ax & + & (a-1)y & + & z & = & 1 & L_2 \\ x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$$\left\{\begin{array}{cccccccc} x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3\to L_1 \\ & & & & (a-1)z & = & -b & L_1-L_3\to L_2 \\ & - & y & + & (1-a)z & = & 1-ab-a & L_2-aL_3\to L_3\end{array}\right.\Leftrightarrow$$

$\boxed{\text{Si } a \neq 1}\left\{\begin{array}{lcll} z & = & \dfrac{b}{1-a} & \\ y & = & b-1+ab+a & -(L_2+L_3) \\ x & = & 2-ab-a-\dfrac{b}{1-a} & \end{array}\right.$

$\boxed{\text{Si } a = 1}$, $(S_{1,b}) : \left\{\begin{array}{ccccccll} x & + & y & + & z & = & 1 & L_1 \\ x & & & + & z & = & 1 & L_2 \\ x & + & y & + & z & = & b+1 & L_3 \end{array}\right.$

Si de plus $b+1=1 \Leftrightarrow b=0$ alors $(S_{1,0}) : \left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 0 \\ z & = & t \end{array}\right.$ et si $b \neq 0$ alors $S=\emptyset$

Conclusion $(S_{a,b})$ est compatible pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ sauf si $a=1$ et $b \neq 0$

Si $a \neq 1$ alors l'ensemble des solutions est un point de coordonnées

$$(2-a-ab-\frac{b}{1-a}, b-1+ab+a, \frac{b}{1-a})$$

Si $a=1$ et $b=0$ alors l'ensemble des solutions est une droite de représentation paramétrique

$$\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1-t \\ y & = & 0, \quad t \in \mathbb{R} \\ z & = & t \end{array}\right.$$

Exercice $n°3$ (4 points:0) 0.25 1) 0.25 + 1 2) 1.5 3) 1)

Soit (E) $\left(1+\sin^2(x)\right)y' + \sin(2x)y = \arctan(x)$.

1. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

2. $(H) : \left(1+\sin^2(x)\right)y' + \sin(2x)y = 0 \Leftrightarrow y' + \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}y = 0$ car $1+\sin^2(x) \neq 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

   $a(x) = \dfrac{2\sin x\cos x}{1+\sin^2 x}$ est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ dont le dénominateur ne s'annule pas.

Donc a admet des primitives sur $\mathbb{R}$ et $A(x) = \displaystyle\int a(x)\mathrm{d}x = \ln(1+\sin^2 x)$ car $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cos x$ et $y_H(x) = C\mathrm{e}^{-\ln(1+\sin^2 x} = \dfrac{C}{1+\sin^2 x}$

$$\boxed{S_{(H)} = \{x \mapsto \frac{C}{1+\sin^2 x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}}$$

3. On pose $y_p(x) = \dfrac{C(x)}{1+\sin^2 x}$ et on a alors $C'(x) = \arctan x$

$C(x) = \displaystyle\int \arctan x = x\arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} = x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)$ en posant $u' = 1, u = x, v = \arctan x, v' = \dfrac{1}{1+x^2}$ u et v étant c^1 sur $\mathbb{R}$ d'où

$$\boxed{y_p(x) = \frac{x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1+\sin^2 x}}$$

$$\boxed{S_{(E)} = \{x \mapsto \frac{C + x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)}{1+\sin^2 x}, C \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}\}}$$

Exercice $n°4$ (6 points: 1) $0.25 + 0.25 + 0.52$ 2) 2×0.5 3) 2.5 4) $1 + 0.25 + 0.25$)

$(E_\alpha) : y'' - 2\alpha \mathrm{y}' + \left(1+\alpha^2\right)\mathrm{y} = \cos(\mathrm{x}) - \sin(\mathrm{x})$.

1. $(H_\alpha) : y'' - 2\alpha \mathrm{y}' + \left(1+\alpha^2\right)\mathrm{y} = 0 \quad (K_\alpha) : r^2 - 2\alpha r + \left(1+\alpha^2\right) = 0$

   $\Delta = 4\alpha^2 - 4(1+\alpha^2) = -4$ $\boxed{z_1 = \alpha + \mathrm{i} \quad z_1 = \alpha - \mathrm{i}}$

   $(K_\alpha) : (z - \alpha - \mathrm{i})(z - \alpha + \mathrm{i}) = 0$

2. $\boxed{S^{\mathbb{C}}_{(H_\alpha)} = \{C_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i})x} + C_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i})x}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}}$

   $\boxed{S^{\mathbb{R}}_{(H_\alpha)} = \{\mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos x + B\sin x\right), A, B \in \mathbb{R}\}}$

3. $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right) : y'' - 2\alpha y' + \left(1+\alpha^2\right) y = \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$.

   $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0}$ alors on pose $z_{p,\alpha} = \lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ car i n'est pas racine de (K_α)

   On a alors $z'_{p,\alpha} = \lambda\,\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $z''_{p,\alpha} = -\lambda\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

   En remplaçant dans $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right)$ on obtient $\lambda = \dfrac{1}{\alpha^2 - 2\mathrm{i}\alpha}$ et $\boxed{y^{\mathbb{C}}_{p,\alpha} = \dfrac{1}{\alpha^2 - 2\mathrm{i}\alpha}\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$

   $\boxed{\text{Si } \alpha = 0}$ alors alors on pose $z^{\mathbb{C}}_{p,0} = \lambda\,x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ car i est racine simple de (K_α)

   On a alors $z'_{p,0} = \lambda\,(1+\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$ et $z''_{p,0} = \lambda\,(2\mathrm{i} - x)\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}$

En remplaçant dans $\left(E_0^{\mathbb{C}}\right)$ on obtient $\lambda = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}$ et $\boxed{y_{p,0}^{\mathbb{C}} = \dfrac{x}{2\mathrm{i}}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}$

4. cos(x) − sin(x) =Re $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$ − Im $\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}\right)$

   Donc, d'après le principe de superposition, $y_{p,\alpha} = \mathrm{Re}\left(y_{p,\alpha}^{\mathbb{C}}\right) - \mathrm{Im}\left(y_{p,\alpha}^{\mathbb{C}}\right)$

   $\boxed{\text{Si } \alpha \neq 0}$ alors $y_{p,\alpha}^{\mathbb{C}} = \dfrac{1}{\alpha^2 - 2\mathrm{i}\alpha}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \dfrac{\alpha + 2\mathrm{i}}{\alpha(\alpha^2+4)}\left(\cos x + \mathrm{i}\sin x\right)$

   D'où $\mathrm{Re}\left(y_{p,\alpha}^{\mathbb{C}}\right) = \dfrac{1}{\alpha^3+4\alpha}\left(\alpha\cos x - 2\sin x\right)$ et $\mathrm{Im}\left(y_{p,\alpha}^{\mathbb{C}}\right) = \dfrac{1}{\alpha^3+4\alpha}\left(\alpha\sin x + 2\cos x\right)$

$$\boxed{y_{p,\alpha} = \frac{(\alpha-2)\cos x - (\alpha+2)\sin x}{\alpha^3+4\alpha}}$$

$$\boxed{S_{(E_\alpha)}^{\mathbb{C}} = \{\frac{(\alpha-2)\cos x - (\alpha+2)\sin x}{\alpha^3+4\alpha} + C_1\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i})x} + C_2\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i})x}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}}$$

$$\boxed{S_{(E_\alpha)}^{\mathrm{R}} = \{\frac{(\alpha-2)\cos x - (\alpha+2)\sin x}{\alpha^3+4\alpha} + \mathrm{e}^{\alpha x}\left(A\cos x + B\sin x\right), A, B \in \mathbb{R}\}}$$

   $\boxed{\text{Si } \alpha = 0}$ alors $y_{p,0}^{\mathbb{C}} = \dfrac{1}{2\mathrm{i}}\,x\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = \dfrac{-\mathrm{i}x}{2}\left(\cos x + \mathrm{i}\sin x\right)$

   D'où $\mathrm{Re}\left(y_{p,0}^{\mathbb{C}}\right) = \dfrac{x}{2}\sin x$ et $\mathrm{Im}\left(y_{p,0}^{\mathbb{C}}\right) = -\dfrac{x}{2}\cos x$ donc

$$\boxed{y_{p,0} = \frac{x}{2}\left(\cos x + \sin x\right)}$$

$$\boxed{S_{(E_0)}^{\mathbb{C}} = \{\frac{x}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + C_1\mathrm{e}^{\mathrm{i}x} + C_2\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}, C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}}$$

$$\boxed{S_{(E_\alpha)}^{\mathrm{R}} = \{\frac{x}{2}\left(\cos x + \sin x\right) + \left(A\cos x + B\sin x\right), A, B \in \mathbb{R}\}}$$