Nombres complexes II

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Exercice 1 On note t la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $2+\mathrm{i}$, h l'homothétie de centre O de rapport -3, et s la réflexion d'axe (Ox). Pour tout point M du plan, on pose $g(M) = t(h(M))$ et $f(M) = g(s(M))$.

1. La transformation g admet-elle un point invariant ? Est-elle une homothétie ?
2. La transformation f admet-elle un point invariant ? Est-elle une homothétie ?

Exercice 2 On considère la transformation du plan complexe d'origine O qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = (1+\mathrm{i})z$.

1. Faire une figure et placer les images des points $A(1)$, $B(2)$ et $C(-1+\mathrm{i})$.
2. Montrer que f est la composée d'une rotation de centre O et d'une homothétie de centre O dont on précisera l'angle pour l'une et le rapport pour l'autre.
3. Pour tout nombre complexe non nul $re^{i\theta}$, quelle est la transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(z')$ défini par $z' = re^{i\theta}z$?

Exercice 3 Soient les deux points $A(1)$ et $B(-1)$ du plan complexe.
On considère la transformation qui à tout point $M(z)$ distinct de A associe le point $M'(z')$ défini par

$$z' = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$$

1. Montrer que $|z'| = 1$ et que $\dfrac{z'-1}{z-1}$ est un nombre réel.
2. En déduire une construction géométrique du point M' à partir du point M.
3. Que peut-on dire de l'angle $\widehat{AM'B}$?

Exercice 4 A, B et C sont trois points non alignés d'affixes respectives a, b et c et $\mathrm{j} = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}}$.

1. Calculer j^3, $1+\mathrm{j}+\mathrm{j}^2$ et montrer que $\bar{\mathrm{j}} = \mathrm{j}^2$.
2. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Déterminer l'écriture complexe de la rotation de centre A et d'angle θ.
3. Montrer que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a + b\mathrm{j} + c\mathrm{j}^2 = 0$ ou $a + b\mathrm{j}^2 + c\mathrm{j} = 0$.
4. En déduire que ABC est équilatéral si, et seulement si, $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$.

Exercice 5 Résoudre les équations et représenter géométriquement les solutions.

a) $z^4 = 1$ b) $z^4 = i$ c) $z^6 = -32 + 32i\sqrt{3}$

Exercice 6 Trouver une racine évidente de l'équation, puis la résoudre.

a) $z^3 - z - 6 = 0$ b) $z^3 - \mathrm{i}z^2 - z + \mathrm{i} = 0$ c) $2z^3 + z^2 + 3z - \mathrm{i} + 1 = 0$

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

1. $\left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3 + \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^2 + \frac{z+1}{z-1} + 1 = 0$ 2. $z^n = 1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ 3. $(z+\mathrm{i})^n + (z-\mathrm{i})^n = 0$

4. $\left(1+z^2\right)^n - (z-\mathrm{i})^n = 0$ 5. $z^{2n} - 2z^n \cos(n\theta) + 1 = 0$, où $\theta \in \mathbb{R}$. 6. $\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$.

Exercice 8 Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\frac{\mathrm{e}^z + 1}{\mathrm{e}^z - 1} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.