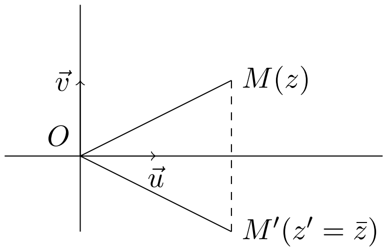
Nombres complexes II

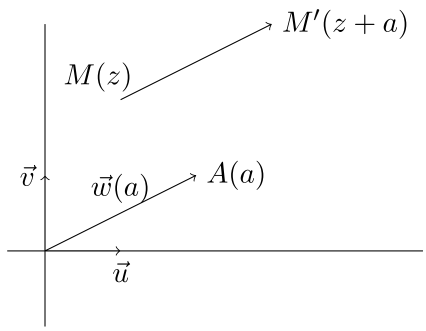
Le plan est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1 Transformations du plan

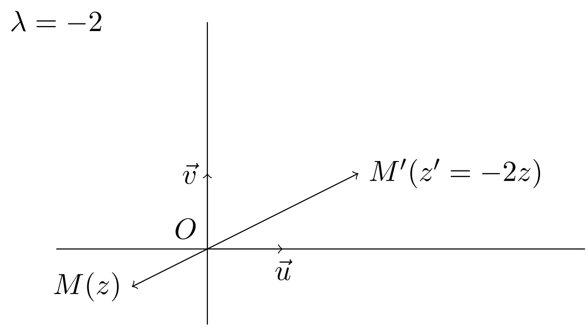
Théorème 1. La transformation du plan qui à tout point $M(z)$ associe le point $M'(\bar{z})$ est la **symétrie axiale** par rapport à l'axe des abscisses.



Définition 1. Soit $\overrightarrow{w}$ un vecteur d'affixe a.
En associant à M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = z+a$, on définit une transformation du plan appelée **translation de vecteur** $\overrightarrow{w}$, d'écriture complexe $z \mapsto z + a$.



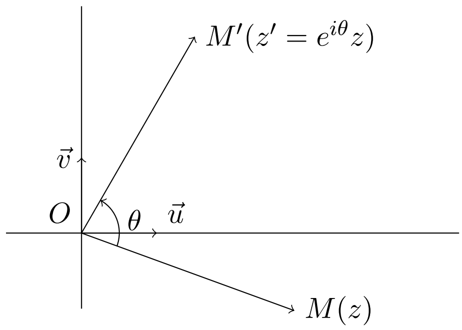
Définition 2. Soit $k \in \mathbb{R}^*$. En associant à M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = kz$, on définit une transformation du plan appelée **homothétie de centre** O **et de rapport** k, d'écriture complexe $z \mapsto kz$.



Remarque Si on note h l'homothétie de centre O et de rapport k, alors pour tout $M \neq O$:

$$M' = h(M) \Longleftrightarrow \overrightarrow{OM'} = k\overrightarrow{OM}$$

Définition 3. En associant à M d'affixe z, le point M' d'affixe $z' = e^{i\theta}z$, on définit une transformation du plan appelée **rotation de centre** O **et d'angle** θ, d'écriture complexe $z \mapsto e^{i\theta}z$.



Remarque Si on note r la rotation de centre O et d'angle θ, alors pour tout $M \neq O$:

$$M' = r(M) \Longleftrightarrow \frac{OM'}{OM} = 1 \text{ et } (\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta\ [2\pi].$$

Définition 4. Soit f une transformation du plan.
Un point M est dit **invariant** par f si $f(M) = M$.

Propriété 1. L'ensemble des points invariants par une transformation f est l'ensemble des points dont l'affixe z vérifie $f(z) = z$.

Définition 5. La translation de vecteur nul, l'homothétie de centre O de rapport 1, la rotation de centre O d'angle $2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ laissent tout point du plan invariant.
Une telle transformation est appelée **identité du plan** et notée $Id_{\mathcal{P}}$.

Exemple 1. f est la transformation d'écriture complexe $f(z) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})z + 2 - \mathrm{i}$.
Montrer que f est la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

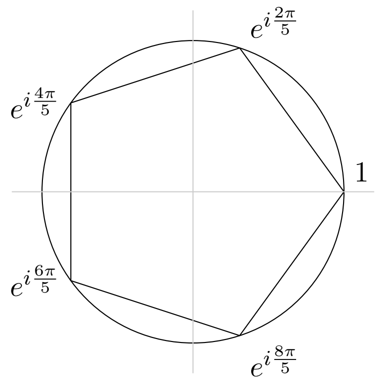
2 Résolutions d'équations $z^n = a$, $a \in \mathbb{C}^*$

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On appelle **racine n-ième** de l'unité tout nombre complexe z vérifiant $z^n = 1$.

L'ensemble des racines n-ièmes de l'unité est noté $\mathbb{U}_n = \{z \in \mathbb{C} / \ z^n = 1\}$.

$$\mathbb{U}_5 = \left\{1, e^{i\frac{2\pi}{5}}, e^{i\frac{4\pi}{5}}, e^{i\frac{6\pi}{5}}, e^{i\frac{8\pi}{5}}\right\}$$



Exemple 2. Déterminer et représenter géométriquement $\mathbb{U}_1$, $\mathbb{U}_2$, $\mathbb{U}_3$ et $\mathbb{U}_4$.

Propriété 2. Soit un entier $n \geq 3$ et $\omega = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$.

1. $z^n = 1 \Leftrightarrow \left(z = \mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}},\ k \in [\![0, n-1]\!]\right)$
2. $\mathbb{U}_n = \{1, \omega, \ldots, \omega^{n-1}\}$;
3. $1 + \omega + \ldots + \omega^{n-1} = 0$;

4. l'image de $\mathbb{U}_n$ est un polygone régulier à n cotés, inscrit dans le cercle trigonométrique, dont un sommet a pour affixe 1.

Définition 7. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.

On appelle **racine n-ième** de a tout nombre complexe z vérifiant $z^n = a$.

Théorème 2. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{C}^*$.
$z^n = a \Leftrightarrow \left(z = r^{\frac{1}{n}} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\alpha+2k\pi}{n}}, \quad k \in [\![0, n-1]\!]\right)$, où r et α sont respectivement le module et un argument de a.

Exemple 3. Déterminer les racines cubiques de $a = 8\mathrm{i}$.

3 Exponentielle complexe

Définition 8. Soit $z = x + \mathrm{i}y$, avec $x, y \in \mathbb{R}$. On définit l'exponentielle de z par :

$$\exp(z) = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Remarque : $\mathrm{Re}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \cos(y)$, $\mathrm{Im}(\mathrm{e}^z) = \mathrm{e}^x \sin(y)$, $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$, car $\mathrm{e}^x > 0$, et $\arg(\mathrm{e}^z) = y\ [2\pi]$.

Exemple 4. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z = 1 + \mathrm{i}$.

Propriété 3. Soient $z, z' \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{Z}$. Alors on a :

1. $\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^{z'} \iff (z = z' + 2\mathrm{i}k\pi,\ k \in \mathbb{Z})$;
2. $\mathrm{e}^z \mathrm{e}^{z'} = \mathrm{e}^{z+z'}$, $\qquad \dfrac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^{z'}} = \mathrm{e}^{z-z'}$, $\qquad (\mathrm{e}^z)^n = \mathrm{e}^{nz}$.

Exemple 5. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z} = 1$.