Limites et continuité

Exercice 1 Étudier la limite de

a) $\dfrac{x^2+3x-1}{x-1}$ en 1 b) $\dfrac{x^2-x-6}{x^3+8}$ en -2 c) $\ln\left(\dfrac{2x+1}{x-2}\right)$ en 2 et en $-\dfrac{1}{2}$

d) $\dfrac{\sqrt{x^2-1}-2x}{x-1}$ en 1 et $-\infty$ e) $\dfrac{e^{2x}-e^x+x}{e^x-x}$ en $+\infty$ et $-\infty$ f) $\ln(1+e^x)-x+1$ en $+\infty$

Exercice 2 On note F la primitive sur $\mathbb{R}^+$ de la fonction définie par $f(x)=\dfrac{1}{1+x^3}$ qui s'annule en 0, c'est-à-dire que $F(x)=\displaystyle\int_0^x \frac{dt}{1+t^3}$ pour tout $x\in\mathbb{R}^+$.

1. Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$
2. En déduire que F admet une limite en $+\infty$
3. Montrer que pour $x\geq 1$, $\displaystyle\int_1^x \frac{dt}{1+t^3}\leq \arctan(x)-\frac{\pi}{4}$
4. En déduire que, pour tout $x\geq 0, F(x)\leq 1+\dfrac{\pi}{4}$, puis que F admet une limite finie en $+\infty$.

Exercice 3

1. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue en 0 telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f(2x)=f(x)$.

   Montrer que $\forall x\in\mathbb{R},\ \forall n\in\mathbb{N},\ f(x)=f\left(\dfrac{x}{2^n}\right)$. En déduire que f est constante.

2. Soit $f:\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x,y\in\mathbb{R},\ f(x+y)=f(x)+f(y)$.
   Montrer que $\forall q\in\mathbb{Q},\ f(q)=qf(1)$. En déduire que f est linéaire.

Exercice 4 Dans chaque cas, étudier la continuité de f et calculer ses limites aux bornes de son ensemble de définition.

1. $f(x)=x^2\ln\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ 2. $f(x)=\lfloor x\rfloor+\sqrt{x-\lfloor x\rfloor}$ 3. $f(x)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{1-x^2}} & ,x\in]-1,1[\\ 0 & ,x\notin]-1,1[\end{cases}$.

Exercice 5 Dans chaque cas, déterminer si f est prolongeable par continuité en a :

1. $f(x)=x^{\frac{1}{1-x^2}}$ et $a=1$ 2. $f(x)=\dfrac{\sin(x)-\cos(x)}{x-\pi/4}$ et $a=\pi/4$

3. $f(x)=x\sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $a=0$ 4. $f(x)=\ln(x)\cos\left(\dfrac{1}{x}\right)$ et $a=0$.

Exercice 6 On appelle point fixe d'une fonction $f : D_f \longrightarrow \mathbb{R}$ tout $x \in D_f$ vérifiant $f(x) = x$.

1. Soit $f : [0;1] \longrightarrow [0;1]$ une fonction continue.
   Montrer que f admet un point fixe.

2. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement décroissante.
   Montrer que f admet un unique point fixe.

Exercice 7 Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation (E_n) : $x^n \ln(x) = 1$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une unique solution. On la note u_n.

2. Montrer que la suite (u_n) est décroissante et minorée par 1.

3. Étudier la convergence de la suite (u_n).

Exercice 8 f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+1) = f(x) + 1$.

La fonction g est définie par $g(x) = f(x) - x$.

1. Montrer que la fonction g est périodique de période 1.

2. Montrer que g est bornée sur $[0; +\infty[$ puis déterminer la limite de $\dfrac{g(x)}{x}$ lorsque $x \to +\infty$.

3. En déduire la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$ puis celle de $f(x)$ lorsque $x \to +\infty$.

Exercice 9 Montrer que la fonction $f : x \mapsto \dfrac{x}{1+|x|}$ réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle à déterminer, puis expliciter sa bijection réciproque.