Lycée Jean Perrin | PTSI 1 & 2

DS3 de Mathématiques - 2 heures
Le samedi 9 décembre 2023

Ce devoir est constitué d'exercices entièrement indépendants, pouvant être traités dans un ordre quelconque.
Soignez la rédaction et la présentation : tout résultat doit être encadré ou souligné.
L'usage des calculatrices n'est pas autorisé.

Exercice n°1 (Calcul algébrique & application) (5 points:**1)** 2.5 **2)** 1+3x0.5)

1) Calculer

$$\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} |i-j|$$

2) On considère l'application $\phi : \mathbb{C}\backslash\{-3\} \longrightarrow \mathbb{C}\backslash\{i\}$ qui à z associe $\phi(z) = \frac{iz-i}{z+3}$. En étudiant, pour tout $\omega \in \mathbb{C}\backslash\{i\}$, son image réciproque $\phi^{-1}(\{\omega\})$ par ϕ, dites si ϕ est **(i)** injective **(ii)** surjective **(iii)** bijective.

Exercice n°2 (Pivot de Gauss) (5 points: **1)** 1.5 **2)** 1.5 **3)** 2)

Pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on considère le système $(S_{a,b})$: $\begin{cases} x+y+az & = 1 \\ ax+(a-1)y+z & = 1 \\ x+y+z & = b+1 \end{cases}$ d'inconnues réelles x,y,z.

Résoudre ce système en répondant aux questions suivantes:

1) À quelle condition $(S_{a,b})$ est-il compatible?

2) Décrire, pour tout couple $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, la *nature* de l'ensemble des solutions de $(S_{a,b})$.

3) Lorsque $(S_{a,b})$ est compatible, précisez l'ensemble de ses solutions.

Exercice n°3 (Équation différentielle du premier ordre) (4 points:**0)** 0.25 **1)** 0.25+1 **2)** 1.5 **3)** 1)

Soit (E) l'équation différentielle linéaire du premier ordre $\left(1+\sin^2(x)\right) y' + \sin(2\,x)\, y = \arctan(x)$. On s'intéresse à l'ensemble $\mathcal{S}_{(E)}$ de ses solutions $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

0) Rappeler la formule de duplication du sinus.

1) Écrire l'équation homogène (H) associée à (E) puis déterminer son ensemble de solutions $\mathcal{S}_{(H)}$.

2) Par la méthode de variation de la constante, construire une solution particulière y_p de (E). *(Une intégration par parties s'avèrera utile.)*

3) En déduire $\mathcal{S}_{(E)}$.

Exercice n°4 - équation différentielle du second ordre (6 points: **1)** 0.25+0.25+0.5 **2)** 2x0.5 **3)** 2.5 **4)** 1+0.25+0.25)

Considérons, pour tout paramètre réel α, l'équation différentielle du second ordre $(E_\alpha) : y'' - 2\alpha\, y' + (1+\alpha^2) y = \cos(x) - \sin(x)$. On s'intéresse à ses solutions définies sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles et complexes.

1) Écrire son équation homogène (H_α). Quelle est son équation caractéristique associée (K_α)? Donner sa forme factorisée.

2) En déduire $S^{\mathbb{C}}_{(H_\alpha)}$ ensemble des solutions de (H_α) à valeurs complexes et $S^{\mathbb{R}}_{(H_\alpha)}$ ensemble des solutions de (H_α) à valeurs réelles.

3) Posons $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right) : y'' - 2\alpha\, y' + (1+\alpha^2) y = e^{ix}$. Trouver, en discutant selon la valeur de $\alpha \in \mathbb{R}$, une solution particulière $y^{\mathbb{C}}_{p,\alpha}$ de $\left(E^{\mathbb{C}}_\alpha\right)$.

4) En déduire, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, une solution particulière $y_{p,\alpha}$ de (E_α) puis décrire l'ensemble $S^{\mathbb{C}}_{(E_\alpha)}$ des solutions de (E_α) à valeurs complexes ainsi que l'ensemble $S^{\mathbb{R}}_{(E_\alpha)}$ des solutions de (E_α) à valeurs réelles.