Dérivabilité

Exercice 1 Dans chaque cas, étudier la dérivabilité de f et déterminer sa dérivée :

1. $f(x) = \begin{cases} x^x & si\ x > 0 \\ 1 & si\ x = 0 \end{cases}$

2. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(x)}{\sqrt{\pi - 2x}} & si\ x < \dfrac{\pi}{2} \\ 0 & si\ x = \dfrac{\pi}{2} \end{cases}$

Exercice 2 Soit f définie par $f(x) = \begin{cases} a\sqrt{x} + \ln(1+x) & \text{si} \quad x > 0 \\ b\,\mathrm{ch}\,(x) + cx + d & \text{si} \quad x \leq 0 \end{cases}$, où $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

1. Déterminer une CNS pour que f soit continue en 0. Quelle est alors la valeur de $f(0)$?
2. Déterminer une CNS pour que f soit dérivable en 0. Quelle est alors la valeur de $f'(0)$?

Exercice 3 Trouver toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ des équations différentielles :

1. $x^2y' - \alpha y = 0$

2. $xy' + y = \dfrac{2x}{x^2+1}$.

Exercice 4 Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que pour tout polynôme P de degré n, l'équation $P(x) = \mathrm{e}^x$ admet au plus $n+1$ solutions réelles distinctes.

Exercice 5

1. On se propose d'étudier une méthode d'approximation du point fixe de $f : x \mapsto \ln(x+3)$ dans $\mathbb{R}_+$. Pour cela, on considère une suite (u_n) définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
   (a) Montrer que la fonction f admet effectivement un unique point fixe α dans $\mathbb{R}_+$.
   (b) Montrer que la fonction f est k-lipschitzienne sur $\mathbb{R}_+$, avec $0 < k < 1$ (contractante).
   (c) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $|u_n - \alpha| \leq k^n |u_0 - \alpha|$.
   (d) On choisit $u_0 = 2$. Quelle précision sur α obtient-on avec u_4 ?
2. Déterminer, de même, une méthode d'approximation du point fixe du cosinus dans $[0,1]$.

Exercice 6 Soit $\alpha \in]0,1[$. $\forall n \in \mathbb{N}^*$, on pose $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{1-\alpha}{(k+1)^\alpha} \leq (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha} \leq \dfrac{1-\alpha}{k^\alpha}$
2. En déduire la limite de u_n.
3. Étudier le cas où $\alpha > 1$.

Exercice 7 Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = \dfrac{1+x^n}{(1+x)^n}$

1. Démontrer que f admet un minimum à déterminer.
2. En déduire que pour tout $x \geq 0$, $(1+x)^n \leq 2^{n-1}(1+x^n)$.
3. Montrer finalement que $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+)^2$, $(x+y)^n \leq 2^{n-1}(x^n+y^n)$.

Exercice 8

1. Déterminer la dérivée *n-ième* de la fonction $g : x \mapsto (x+1)^2 \mathrm{e}^{-x}$
2. (a) Déterminer la dérivée *n-ième* de la fonction $f : x \mapsto (x-a)^n(x-b)^n$, où $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

   (b) En déduire la valeur de $S_n = \displaystyle\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}^2$

Exercice 9 Prolonger par continuité f, puis déterminer si ce prolongement est $\mathscr{C}^1$ sur son ensemble de définition où $f(x) = \dfrac{|x|}{x}\ln(1-|x|)$

Exercice 10 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^x & \textit{si } x < 0 \\ ax^2+bx+c & \textit{si } x \geq 0 \end{cases}$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur a, b et c pour que $f \in \mathscr{C}^2(\mathbb{R})$.

Exercice 11 Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$ et de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^*$.
2. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, il existe une fonction polynôme P_n telle que $\forall x \neq 0$,
$$f^{(n)}(x) = \frac{P_n(x)}{x^{3n}} f(x).$$
3. Calculer, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x^{3n+1}}$.
4. En déduire que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et déterminer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.