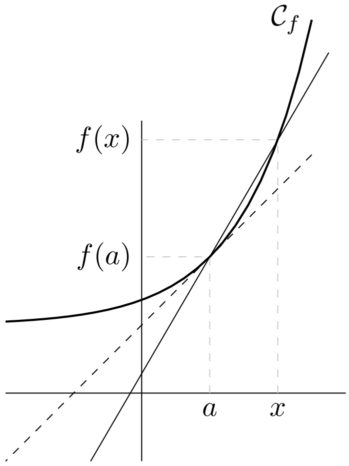
Dérivabilité

Dans tout ce chapitre, f est une fonction réelle définie sur un intervalle I non réduit à un point.

1 Nombre dérivé et fonction dérivée

1.1 Dérivabilité en $a \in \mathbb{R}$



Définition 1. On dit que f est **dérivable** en $a \in I$ si le taux d'accroissement de f en a,
$\tau_a : x \mapsto \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, admet une limite finie en a.
Dans ce cas, cette limite est appelée nombre dérivé de f en a, et notée $f'(a)$ ou $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque : Si cette limite existe, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)$.

Définition 2. Soit $a \in I$.
On dit que f est **dérivable à droite** (resp. à gauche) en a si le taux d'accroissement de f en a admet une limite finie à droite (resp. à gauche) en a. Dans ce cas, cette limite est appelée **nombre dérivé à droite**(resp. à gauche) de f en a et notée $f'_d(a)$ (resp. $f'_g(a)$).

Propriété 1. Soit $a \in I$ qui n'est pas une extrémité de I.

f est dérivable en a ssi f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) = f'_g(a)$.

Dans ce cas, $f'(a) = f'_d(a) = f'_g(a)$.

Exemple 1. Étudier la dérivabilité de f en 0 et en 2 si $f(x) = \begin{cases} x e^{\frac{x}{x-2}} & \text{si} \quad x \in]0,2[\\ 0 & \text{si} \quad x \notin]0,2[\end{cases}$

Interprétation géométrique : Si f est dérivable en a alors son graphe C_f admet en son point d'abscisse a une tangente de pente $f'(a)$ et d'équation $y = f(a) + f'(a)(x-a)$. Sinon,

• si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \pm\infty$ alors C_f admet une **tangente verticale** en a, d'équation $x = a$

• si f est dérivable à droite et à gauche en a et $f'_d(a) \neq f'_g(a)$, alors C_f admet **deux demi-tangentes** à droite et à gauche en a de coefficients directeurs respectifs $f'_d(a)$ et $f'_g(a)$.

Théorème 1. f est dérivable en $a \in I$ ssi il existe un réel ℓ et une fonction ε vérifiant :

$$\forall x \in I, \quad f(x) = f(a) + \ell(x-a) + (x-a)\varepsilon(x), \text{ et } \quad \varepsilon(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0.$$

Dans ce cas, $\ell = f'(a)$ et cette expression est appelée **développement limité d'ordre** 1 **en** a.

Exemple 2. $\mathrm{DL}_1(0)$ de $\sin(x)$, $\cos(x)$, $\tan(x)$, e^x, $\ln(1+x)$, $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\arctan(x)$.

Propriété 2. Si f est dérivable en $a \in I$ alors f est continue en a. **Réciproque fausse**

1.2 Fonction dérivée

Définition 3. f est dérivable sur I si f est dérivable en tout point $a \in I$.

Dans ce cas, on appelle fonction dérivée de f sur I la fonction $f' : \left| \begin{array}{l} I \to \mathbb{R} \\ x \mapsto f'(x) \end{array} \right.$.

Conséquence : Si f est dérivable sur un intervalle I alors f est continue sur I.

fonction f	ensemble de dérivabilité	dérivée
$f(x) = x^n$, $n \in \mathbb{Z}$	$\mathbb{R}$ si $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{R}^*$ si $n \in \mathbb{Z}_-^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$
$f(x) = \mathrm{e}^x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{e}^x$
$f(x) = \mathrm{ch}\,(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{sh}\,(x)$
$f(x) = \mathrm{sh}\,(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \mathrm{ch}\,(x)$
$f(x) = \ln(x)$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \frac{1}{x}$
$f(x) = x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$	$\mathbb{R}_+^*$	$f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
$f(x) = \cos(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin(x)$
$f(x) = \sin(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos(x)$
$f(x) = \tan(x)$	$\mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}\}$	$f'(x) = 1 + \tan^2(x) = \dfrac{1}{\cos^2(x)}$
$f(x) = \arccos(x)$	$]-1,1[$	$f'(x) = \dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arcsin(x)$	$]-1,1[$	$f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$f(x) = \arctan(x)$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Propriété 3. Si f et g sont dérivables sur I et $\lambda \in \mathbb{R}$ alors λf, $f+g$ et fg sont dérivables sur I et $(\lambda f)' = \lambda f'$ $\quad (f+g)' = f' + g'$ $\quad$ et $\quad (fg)' = f'g + fg'$

Si de plus g ne s'annule pas sur I alors $1/g$ et f/g sont dérivables sur I et

$$\left(\frac{1}{g}\right)' = -\frac{g'}{g^2} \quad \text{et} \quad \left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

Application : Les fonctions polynômiales et rationnelles (quotients de deux polynomiales) sont dérivables sur leur ensemble de définition.

Propriété 4. Soient $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$ telles que $f(I) \subset J$.

Si f est dérivable sur I et g est dérivable sur J alors $g \circ f$ est dérivable sur I et

$$(g \circ f)' = f'(g' \circ f)$$

Remarque : Pour les physiciens, si x, y et z sont des variables telles que $y = f(x)$ et $z = g(y)$ alors la formule précédente s'écrit sous forme différentielle : $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} \times \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

Application : On trouve ainsi, lorsqu'elles existent, les dérivées de f^n, $\sqrt{f}$, e^f, $\ln(f)$,...

Propriété 5. Soit une fonction $f : I \to J$ bijective.

Si f est dérivable sur I et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est dérivable sur $J = f(I)$ et

$$\left(f^{-1}\right)' = \frac{1}{f' \circ f^{-1}}.$$

Interprétation géométrique : Les graphes de f et de f^{-1} sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$ donc

• si C_f admet une tangente non horizontale en a ($f'(a)$ existe et $f'(a) \neq 0$) alors $C_{f^{-1}}$ admet une tangente qui n'est pas verticale en $f(a)$ ($\left(f^{-1}\right)'(f(a))$ existe)

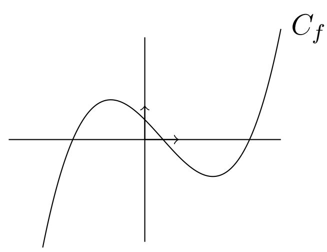
• si C_f admet une tangente horizontale en a ($f'(a)$ existe et $f'(a) = 0$) alors $C_{f^{-1}}$ admet une tangente verticale en $f(a)$ (f^{-1} n'est pas dérivable en $f(a)$)

• si C_f admet une tangente verticale en a (f n'est pas dérivable en a) alors $C_{f^{-1}}$ admet une tangente horizontale en $f(a)$ (f^{-1} est dérivable en $f(a)$, et $(f^{-1})'(f(a)) = 0$).

Application : On trouve ainsi, les dérivées des fonctions ln, $\sqrt[n]{\cdot}$, arccos, arcsin et arctan.

Exemple 3. Définir la fonction dérivée de $f : x \mapsto \sqrt[4]{1 - 2x}$.

2 Propriétés des fonctions dérivables



2.1 Extremum local et Théorème de Rolle

Rappel : f admet un **maximum (resp. minimum) global** sur I si

$$\exists c \in I,\ \forall x \in I,\ f(x) \leq f(c) \text{ (resp. } f(x) \geq f(c))$$

Définition 4. Soit $c \in I$. On dit que f **admet un maximum (resp. minimum) local** en c si

$\exists \alpha > 0,\ \forall x \in I,\ |x - c| \leq \alpha \Longrightarrow f(x) \leq f(c)$ (resp. $f(x) \geq f(c)$).

On appelle **extremum local** de f un maximum ou un minimum local de f.

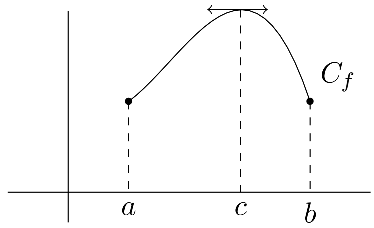
Propriété 6. Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dérivable sur l'intervalle ouvert $]a, b[$.

Si f admet un extremum local en $c \in]a, b[$ alors $f'(c) = 0$. **Réciproque fausse.**

Remarque : Si $c \in \{a, b\}$ alors $f(c)$ peut être un extremum sans que f soit dérivable en c, ou que $f'(c)$ soit nul. Si $c \in]a, b[$ alors on peut avoir $f'(c) = 0$ sans que $f(c)$ soit un extremum.

Théorème 2. de Rolle Si f est continue sur $[a, b]$, dérivable sur $]a, b[$ et $f(a) = f(b)$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.



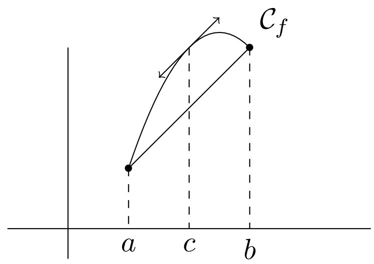
Exemple 4. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'équation $(E_n) :\ x^n - x + 1 = 0$, d'inconnue $x \in \mathbb{R}$.

Montrer qu'elle ne peut avoir plus de deux solutions si n est pair et plus de trois si n est impair.

2.2 Théorème des accroissements finis

Théorème 3. des accroissements finis Si f est continue sur $[a, b]$ et dérivable sur $]a, b[$

alors il existe $c \in]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.



Exemple 5. Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}_+,\ \dfrac{x}{1 + x^2} \leq \arctan(x) \leq x$.

Corollaire 1. Inégalité des accroissements finis

Si f est dérivable sur I et $|f'(x)| \leq K$ sur I alors $\forall (x, x') \in I^2,\ \ |f(x) - f(x')| \leq K|x - x'|$.

2.3 Applications du Théorème des accroissements finis

Théorème 4. Soit f une fonction dérivable sur l'**intervalle** I.

1. f est croissante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) \geq 0$.
2. f est décroissante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) \leq 0$.
3. f est constante sur I ssi $\forall x \in I,\ f'(x) = 0$.

Exemple 6. Montrer que $\forall x \in [0,1]$, $\arcsin(x) + \arcsin\left(\sqrt{1-x^2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.

Théorème 5. **(admis)**(Soit f une fonction dérivable sur l'**intervalle** I.

1. f est strictement croissante sur I ssi $f' \geq 0$ sur I et f' n'est nulle sur aucun intervalle $]a,b[$.

2. f est strictement décroissante sur I ssi $f' \leq 0$ sur I et f' n'est nulle sur aucun intervalle $]a,b[$.

Théorème 6. **de la limite de la dérivée** Soit f continue sur l'**intervalle** I et dérivable sur $I \backslash \{a\}$.

$$\text{Si} \quad f'(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} \quad \text{alors} \quad \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \ell.$$

Dans ce cas,

- si $\ell \in \mathbb{R}$ alors f est dérivable en a et $f'(a) = \ell$,
- si $\ell = \pm\infty$ alors f n'est pas dérivable en a et C_f admet une tangente verticale en a.

Exemple 7. La fonction f est-elle de classe $\mathscr{C}^1$ sur son domaine de définition si :

a) $f(x) = x\ln(x)$ si $x > 0$ et $f(0) = 0$? b) $f(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$?

3 Fonctions de classe $\mathscr{C}^n$

Définition 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si elle existe, la dérivée *n-ième* de f sur I est définie par

$$f^{(0)} = f \text{ et } \forall k \in [\![1,n]\!],\ f^{(k-1)} \text{ est dérivable sur } I \text{ et } f^{(k)} = \left(f^{(k-1)}\right)'.$$

Remarque : La dérivée seconde s'écrit $f'' = f^{(2)} = (f')' = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right) = \dfrac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}$.

Définition 6. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. f est dite de **classe** $\mathscr{C}^n$ sur I si f admet une dérivée *n-ième* sur I continue sur I. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^n$ sur I est noté $\mathscr{C}^n(I)$.

2. f est dite de **classe** $\mathscr{C}^\infty$ sur I si f admet une dérivée n-*ième* sur I pour tout $n \in \mathbb{N}$. L'ensemble des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur I est noté $\mathscr{C}^\infty(I)$.

Exemple 8. À quel ensemble $\mathscr{C}^n(\mathbb{R})$ la fonction f appartient-elle si :

a) $f(x) = \mathrm{e}^x$? b) $f(x) = \sin(x)$? c) $f(x) = x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$?

Remarque : $\mathscr{C}^0(I)$ est l'ensemble des fonctions continues sur I et on a les inclusions :

$$\mathscr{C}^\infty(I) \subset \cdots \subset \mathscr{C}^n(I) \subset \mathscr{C}^{n-1}(I) \subset \ldots \subset \mathscr{C}^2(I) \subset \mathscr{C}^1(I) \subset \mathscr{C}^0(I).$$

Propriété 7. Si $n \in \mathbb{N}^* \cup \{+\infty\}$ et $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I))^2$, alors

1. $\forall (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2,\ \lambda f + \mu g \in \mathscr{C}^n(I)$ et $(\lambda f + \mu g)^{(n)} = \lambda f^{(n)} + \mu g^{(n)}$ **Linéarité**
2. $fg \in \mathscr{C}^n(I)$ et $(fg)^{(n)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(k)} g^{(n-k)}$ **Formule de Leibniz.**

Exemple 9. Calculer la dérivée n-*ème* de $f : x \mapsto x^2 \mathrm{e}^x$.

Théorème 7. Soit $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$.

1. Si $(f,g) \in (\mathscr{C}^n(I))^2$ alors $f+g$, fg et f/g (si g ne s'annule pas sur I) sont $\mathscr{C}^n$ sur I.
2. Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$, $g \in \mathscr{C}^n(J)$ et $f(I) \subset J$ alors $g \circ f$ est $\mathscr{C}^n$ sur I.
3. Si $f \in \mathscr{C}^n(I)$ est bijective et f' ne s'annule pas sur I alors f^{-1} est $\mathscr{C}^n$ sur $f(I)$.

Application : Une fonction usuelle est $\mathscr{C}^\infty$ sur chaque intervalle de son domaine de dérivabilité.

Exemple 10. Montrer que $f : x \mapsto 3x^2 \arcsin(\sqrt{x})$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]0,1[$.

4 Fonctions à valeurs complexes

Théorème 8. Inégalité des accroissements finis Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, telle que $|f'(x)|$ soit majorée par un nombre M pour tout $x \in I$,
alors $\forall x_1, x_2 \in I$, $|f(x_2) - f(x_1)| \leq M|x_2 - x_1|$: on dit que f est $M-$lipschitzienne.

Remarque Le théorème de Rolle n'a pas d'équivalent pour les fonctions à valeurs complexes. Par exemple, la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{ix}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(0) = f(2\pi)$. Néanmoins sa dérivée $f'(x) = ie^{ix}$ ne s'annule pas sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.