Q.C.M. n°2 : Analyse dimensionnelle.

Pour samedi 02 août

En physique, la plupart des équations relient des grandeurs qui ont une dimension. Il existe ainsi des équivalences entre les unités du système international. Cette deuxième planche va vous permettre de vous entraîner à trouver ces équivalences, et à les utiliser pour détecter une possible erreur dans vos équations.

Les exemples sont pris dans le cours de PTSI, il est inutile de chercher à comprendre comment ces équations ont été obtenues.

Les réponses doivent être envoyées grâce au formulaire suivant : `https://forms.gle/a6DDcdEcKdP3XKn27`

I. Unités et dimensions

À partir de n'importe quelle équation dont on est sûr, on peut écrire son équivalent du point de vue des dimensions, et obtenir ainsi la dimension d'une grandeur physique.

Ces questions peuvent être dépendantes les unes des autres, c'est-à-dire qu'il est possible de devoir réutiliser un résultat d'une question précédente pour aborder une nouvelle question.

1 - À partir de la deuxième loi de Newton $F = m\,a$, indiquer la dimension d'une force :

A : $\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-2}}$
B : $\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-1}}$
C : $\mathrm{M \cdot T^{-2}}$
D : $\mathrm{M \cdot T^{-1}}$

2 - À partir de n'importe quelle formule connue exprimant une énergie (cinétique, potentielle, mécanique...), donner la dimension d'une énergie :

A : $\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-1}}$
B : $\mathrm{M \cdot L \cdot T^{-1}}$
C : $\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$
D : $\mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-1}}$

3 - La force d'attraction gravitationnelle entre deux masses m_1 et m_2 distantes de r a pour norme $F = \dfrac{Gm_1m_2}{r^2}$. Donner la dimension de la constante gravitationnelle G en fonction uniquement de M, L et T.

A : $\mathrm{M^{-1} \cdot L^2 \cdot T^{-1}}$
B : $\mathrm{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-1}}$
C : $\mathrm{M^{-1} \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$
D : $\mathrm{M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}}$

4 - La troisième loi de Kepler permet de relier, pour toutes les planètes du système solaire, leur période de révolution T à leur demi grand-axe a (comparable à la distance Soleil-planète, si la trajectoire de la planète est quasi-circulaire).

Du point de vue des unités, si on note G la constante gravitationnelle et M_s la masse du Soleil, que peut valoir le rapport $\dfrac{T^2}{a^3}$?

A : $\dfrac{4\pi^2\,G}{M_s}$
B : $4\pi^2\,GM_s$
C : $\dfrac{4\pi^2\,M_s}{G}$
D : $\dfrac{4\pi^2}{GM_s}$

5 - Soit une masse m de corps, de capacité calorifique massique c. Pour augmenter sa température de ΔT, il faut lui apporter une énergie sous forme de quantité de chaleur $Q = mc\,\Delta T$.

Quelle est la dimension de c ? θ est la dimension d'une température.

A : $\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \theta^{-1}$
B : $\mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1} \cdot \theta^{-1}$
C : $\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \theta^{-1}$
D : $\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-1} \cdot \theta^{-1}$

II. Vérification de l'homogénéité d'une équation

Les unités peuvent se diviser ou se multiplier entre elles. En revanche, on ne peut additionner ou soustraire que des grandeurs de même unité : on ne pourrait pas additionner 2 tables + 3 chaises !

À partir de là, une vérification des dimensions dans une équation qu'on a trouvée par calcul peut permettre de détecter une erreur éventuelle. En cas d'erreur, on peut même parfois déterminer la grandeur qui manque pour rectifier l'homogénéité.

Dans les questions suivantes, on suggère une équation. Indiquer si elle est homogène, ou sinon, proposer une correction.

6 - Un système mécanique est constitué d'une masse m et d'un ressort de raideur k (la dimension de k est M.T^{-2}).

On propose comme expression de la fréquence propre f_0 des oscillations de ce système :

$$f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{km}$$

A : Cette formule est homogène.
B : Il faut la corriger par $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{k}{m}}$
C : Il faut la corriger par $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\,km$
D : Il faut la corriger par $f_0 = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{m}{k}}$

7 - Pour lancer un objet (sonde spatiale) depuis la surface de la Terre, de telle sorte qu'elle puisse échapper au champ gravitationnel terrestre, il faut lui communiquer une vitesse initiale suffisante. Un étudiant propose la relation suivante :

$$v_{min} = \sqrt{\frac{G\,M_T}{R_T^2}}$$

où G est la constante gravitationnelle, M_T la masse de la Terre et R_T son rayon.

A : Cette formule est homogène.
B : Il faut la corriger par $v_{min} = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T}}$
C : Il faut la corriger par $v_{min} = \sqrt{\dfrac{G\,M_T}{R_T^3}}$
D : Il faut la corriger par $v_{min} = \sqrt{G\,M_T}$

8 - Un piston de section s contient une quantité n (en moles) de gaz, à la température T_0 et à la pression P_0. On pose brutalement une masse M sur le piston, qui comprime alors le gaz.

Un étudiant trouve que le travail W (qui est une énergie) exercé par cette masse vaut :

$$W = \frac{Mg}{s}\,\frac{nRT_0}{P_0}$$

où $R = 8,314\,\mathrm{J} \cdot \mathrm{mol}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ est la constante des gaz parfaits, et g est le champ de pesanteur terrestre.

A : Cette formule est homogène.
B : Il faut la corriger par $W = \dfrac{Mg}{s}\,\dfrac{RT_0}{P_0}$
C : Il faut la corriger par $W = \dfrac{Mg}{s}\,\dfrac{nRT_0^2}{P_0}$
D : Il faut la corriger par $W = \dfrac{Mg}{s}\,\dfrac{RT_0^2}{P_0}$

9 - La pression atmosphérique vaut P_0. Un demi-cylindre de rayon R et de hauteur h est immergé verticalement dans un liquide de masse volumique ρ. Un étudiant trouve qu'il subit une force de norme :

$$F_p = (2P_0\,h + \rho\,g\,h^3)R$$

A : Cette formule est homogène.
B : Il faut la corriger par $F_p = (2P_0\,h^2 + \rho\,g\,h^3)R$
C : Il faut la corriger par $F_p = (2P_0\,h^2 + \rho\,g\,h^2)R$
D : Il faut la corriger par $F_p = (2P_0\,h + \rho\,g\,h^2)R$

10 - En physique quantique, on s'intéresse à une particule de masse m, confinée dans un espace de longueur L. Un étudiant propose d'exprimer son énergie E_n par la relation :

$$E_n = \frac{\pi^2\hbar^2}{2mL}\,n^2$$

où $\hbar = 1,05 \cdot 10^{-34}\,\mathrm{J\cdot s}$ est la constante de Planck réduite. n est un entier naturel non nul.

A : Cette formule est homogène.
B : Il faut la corriger par $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2mL^2}\,n^2$
C : Il faut la corriger par $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2L}\,n^2$
D : Il faut la corriger par $E_n = \dfrac{\pi^2\hbar^2}{2L^2}\,n^2$