# Q.C.M. n°5 : Dérivées de fonctions.

Pour samedi 23 août

L'évolution d'un phénomène physique se modélise souvent par une fonction mathématique dépendant du temps $t$. Pour obtenir ou pour exploiter cette fonction, il est indispensable de maîtriser les fonctions dérivées.

L'expérience montre que beaucoup d'erreurs évitables sont commises par les étudiants ; cette planche a donc pour but de vous aider à éviter les erreurs traditionnelles de calculs de dérivées.

Les exemples sont pris dans le cours de PTSI, il est inutile de chercher à comprendre comment ces équations ont été obtenues.

Les réponses doivent être envoyées grâce au formulaire suivant : `https://forms.gle/4GJcB4AJMhem23Sw7`

**1 -** La réponse d'un circuit $RC$ à un échelon de tension se traduit par l'évolution de la tension $u_c(t)$ aux bornes du condensateur selon l'expression :

$$u_c(t) = E\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$$

Calculer sa dérivée.

A : $\dfrac{d\,u_c(t)}{dt} = \dfrac{E}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

B : $\dfrac{d\,u_c(t)}{dt} = E\left(1 + \dfrac{1}{\tau}\,e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

C : $\dfrac{d\,u_c(t)}{dt} = E\,e^{-\frac{t}{\tau}}$

D : $\dfrac{d\,u_c(t)}{dt} = E\left(1 + e^{-\frac{t}{\tau}}\right)$

**2 -** Lors d'une transformation d'un gaz parfait à pression constante, son entropie $S$ ne dépend que de la température $T$ et vaut :

$$S(T) = \frac{nR}{\gamma - 1}\,\ln\left(\frac{T}{T_0}\right) + S_0.$$

Exprimer sa dérivée $\frac{d\,S}{dT}$.

A : $\dfrac{d\,S}{dT} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\,\dfrac{T_0}{T} + S_0$

B : $\dfrac{d\,S}{dT} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\,\dfrac{T_0}{T}$

C : $\dfrac{d\,S}{dT} = \dfrac{nR}{1 - \gamma}\,\dfrac{1}{T^2}$

D : $\dfrac{d\,S}{dT} = \dfrac{nR}{\gamma - 1}\,\dfrac{1}{T}$

**3 -** Soit $f(x)$ une fonction dérivable. On pose $g(x) = f^2(x)$. Que vaut sa dérivée $g'(x)$ ?

A : $g'(x) = 2f'(x)$
B : $g'(x) = 2f'(x)f(x)$
C : $g'(x) = 2f(x)$
D : $g'(x) = f'(x)f(x)$

**4 -** Dans un système masse-ressort amorti en régime critique, l'abscisse $x(t)$ de la masse peut évoluer selon l'équation :

$$x(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}$$

Exprimer sa vitesse $v(t) = \dfrac{d\,x(t)}{dt}$.

A : $v(t) = [B + (A + Bt)]\ e^{-\omega_0 t}$

B : $v(t) = -\omega_0(A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}$

C : $v(t) = [B - \omega_0(A + Bt)]\ e^{-\omega_0 t}$

D : $v(t) = (A + Bt)\,e^{-\omega_0 t}$

**5 -** Dans une onde électromagnétique sinusoïdale, la norme $E$ du champ électrique vaut :

$$E(t) = E_0\,\cos(\omega t + \varphi)$$

Que vaut sa dérivée seconde $E''(t) = \dfrac{d^2\,E(t)}{dt^2}$ ?

A : $\dfrac{d^2\,E(t)}{dt^2} = -E_0\,\cos(\omega t + \varphi)$

B : $\dfrac{d^2\,E(t)}{dt^2} = -E_0\omega\,\cos(\omega t + \varphi)$

C : $\dfrac{d^2\,E(t)}{dt^2} = -E_0\omega\,\sin(\omega t + \varphi)$

D : $\dfrac{d^2\,E(t)}{dt^2} = -E_0\omega^2\,\cos(\omega t + \varphi)$

**6 -** Un aimant s'éloigne d'une spire de courant avec une vitesse $v$. Le flux $\phi$ du champ magnétique à travers la spire s'écrit :

$$\phi(t) = \frac{\mu_0\mathcal{M}}{2\pi\,(v\,t)^3}\,\pi R^2$$

La loi de Faraday indique qu'il existe une force électromotrice $e(t) = -\dfrac{d\,\phi(t)}{dt}$. Exprimer $e(t)$.

A : $e(t) = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2\pi\,v^3}\,\dfrac{3}{t^2}\,\pi R^2$

B : $e(t) = \dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2\pi\,v^3}\,\dfrac{3}{t^4}\,\pi R^2$

C : $e(t) = -\dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2\pi\,v^3}\,\dfrac{3}{t^2}\,\pi R^2$

D : $e(t) = -\dfrac{\mu_0\mathcal{M}}{2\pi\,v^3}\,\dfrac{3}{t^4}\,\pi R^2$

**7 -** Un cycliste passe à une vitesse $v_0$ devant un piéton, qui regarde la valve d'un de ses pneus, de rayon $a$. La trajectoire obtenue est une cycloïde ; la vitesse de la valve vaut :

$$v(t) = v_0\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\right]}$$

Quelle est l'accélération $a(t) = \frac{d\,v(t)}{dt}$ de la valve ?

A : $a(t) = \dfrac{-v_0\,\cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)}{\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\right]}}$

B : $a(t) = \dfrac{-v_0\,\sin\left(\frac{v_0 t}{a}\right)}{\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\right]}}$

C : $a(t) = \dfrac{\frac{v_0^2}{a}\,\cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)}{\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\right]}}$

D : $a(t) = \dfrac{\frac{v_0^2}{a}\,\sin\left(\frac{v_0 t}{a}\right)}{\sqrt{2\left[1 - \cos\left(\frac{v_0 t}{a}\right)\right]}}$

**8 -** Un pont diviseur de tension possède deux résistances $r$ et $R$, et est alimenté par une tension $E$. La puissance absorbée par la résistance $R$ vaut :

$$P(R) = \frac{R\,E^2}{(r+R)^2}$$

Pour quelle valeur de $R$ la puissance $P$ est-elle maximale ? *On rappelle que la fonction $P$ est maximale lorsque sa dérivée s'annule.*

A : $P$ est maximale pour $R = 3r$.
B : $P$ est maximale pour $R = 2r$.
C : $P$ est maximale pour $R = r$.
D : $P$ est maximale pour $R = \frac{r}{3}$.

**9 -** Pour étudier une fonction de transfert en régime sinusoïdal forcé, on s'aide de la fonction :

$$f(x) = (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

où $Q$ est suffisamment élevé (par exemple $Q > 1$). Pour quelle valeur $x_r$ la dérivée $f'$ s'annule-t-elle ?

A : $x_r = \sqrt{1+\dfrac{1}{2Q^2}}$

B : $x_r = \sqrt{1-\dfrac{1}{2Q^2}}$

C : $x_r = \sqrt{1+\dfrac{1}{4Q^2}}$

D : $x_r = \sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}$

**10 -** On assimile une canette de soda à un cylindre de rayon $R$, de volume $V = 33\,\text{cL}$. La quantité d'aluminium nécessaire à sa fabrication est proportionnelle à sa surface $S$, dont on peut montrer qu'elle vaut :

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}$$

*(l'étudiant est invité à vérifier ce résultat sur un brouillon).*

Quelle doit être la valeur du rayon $R$ pour minimiser la quantité d'aluminium utilisé ?

A : $R = 3{,}0\,\text{cm}$
B : $R = 3{,}3\,\text{cm}$
C : $R = 3{,}7\,\text{cm}$
D : $R = 4{,}0\,\text{cm}$

**11 -** La vibration d'une corde, tendue selon l'axe $(Ox)$ horizontal, correspond à la propagation d'une onde. Le phénomène dépend à la fois du temps $t$ et de l'abscisse $x$. On peut le modéliser par la fonction $y(x,t)$ dépendant simultanément de ces deux variables. On a :

$$y(x,t) = Y_0\,\cos(\omega t - kx)$$

Dire qu'on dérive la fonction $y$ (sans plus de précision) n'a pas de sens dans ce cas. Il faut préciser :

— soit on dérive $y$ par rapport à la variable $x$. Dans ce cas, on considère que $t$ est une constante et non plus une variable. On note alors la dérivée $\dfrac{\partial y}{\partial x}$.

— soit on dérive $y$ par rapport à la variable $t$. Dans ce cas, on considère que $x$ est une constante et non plus une variable. On note alors la dérivée $\dfrac{\partial y}{\partial t}$.

Quelle proposition est juste ?

A : $\dfrac{\partial y}{\partial x} = k\, Y_0 \, \sin(\omega t - kx)$

B : $\dfrac{\partial y}{\partial t} = \omega\, Y_0 \, \sin(\omega t - kx)$

C : $\dfrac{\partial y}{\partial x} = \omega\, Y_0 \, \sin(\omega t - kx)$

D : $\dfrac{\partial y}{\partial t} = k\, Y_0 \, \sin(\omega t - kx)$