Colles semaine 7

En bref

- Système linéaire :
  - Résolution des systèmes triangulaires en distinguant les cas selon que les coefficients diagonaux sont nuls ou non.
  - Mise en pratique du pivot de Gauss pour triangulariser un système carré.
  - Notion de système de Cramer pour les systèmes carrés.
  - Structure de l'ensemble des solutions d'un système, lien entre les solutions d'un système et celles de son système homogène associé.
  - Brève généralisation aux systèmes non carrés.
- Calcul matriciel :
  - Addition et produit.
  - Cas des matrices carrées. Produit de matrices diagonales (ou triangulaires). Notion d'inversibilité, unicité de la matrice inverse en cas d'existence.
- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- . Calcul pratique de l'inverse d'une matrice carrée par résolution de système associé.
- Transposition de matrices
- Trace des matrices carrées.
- Puissances de matrices carrées. Définition et formule du binôme pour les matrices qui commutent.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Important : Pour cette semaine, chaque élève aura le droit à l'une des question de cours suivante qui nécessite toutes d'appliquer la formule de produit matriciel. S'il apparaît qu'il ne connaît pas sa formule de produit matriciel, alors l'élève aura une note maximale de 7/20 !

- Montrer que si A et B sont deux matrices carrées de même format, alors $(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$. *On limite la preuve aux matrices carrées pour simplifier les notations mais le résultat s'étend dès eu le produit AB a un sens.*
- Montrer que si A et B sont deux matrices carrées de même format ; alors $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$. *Idem, on limite la preuve aux matrices carrées mais le résultat s'étend dès que le produit AB est bien défini et est une matrice carrée.*
- Montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) est encore triangulaire supérieure (respectivement inférieure).

Note aux colleurs

- Concernant la notion de puissance de matrice carrée, les seules propriétés exigibles sont $A^{n+k} = A^nA^k = A^kA^n$ ainsi que la formule du binôme. Pour calculer une puissance de matrice, les méthodes vues en classe se limitent pour l'instant à l'application de la formule du binôme et à une conjecture plus récurrence.
- La notation officielle au programme pour la matrice transposée de A est A^{T}.

En détail

1 Systèmes linéaires

Reprise du programme précédent

2 Le formalisme matriciel

Reprise du programme précédent

3 Lien entre l'inversibilité et la résolution de système l'inversibilité

Proposition 1. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se donne une matrice carré A de taille n et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{C})$. Alors le système $AX = Y$ d'inconnue X est de Cramer si et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est $X = A^{-1}Y$.*

3.1 Détermination pratique de l'inverse par opérations élémentaires

Lemme 2. *Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$A = B \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX = BX)$$

C'est-à-dire que A et B sont égales si et seulement si elles ont même produit sur toutes les matrices colonnes.

Méthode 3. Pour étudier l'existence et déterminer l'éventuel inverse d'une matrice A (disons à 3 lignes et 3 colonnes pour simplifier l'exposé ici), il suffit de résoudre le système linéaire $AX = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{C})$ à paramètre $(a\alpha, \beta, \gamma)$.

- Si ce système n'est pas de Cramer, alors la matrice A n'est pas inversible.
- Si ce système est de Cramer, la matrice A est inversible. On écrit l'unique solution du système en fonction des paramètre (α, β, γ). Comme on sait que cette solution est donnée par $A^{-1}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$, on peut alors identifier les coefficients de A^{-1} grâce au lemme 2.

3.2 Détermination pratique de l'inverse par opérations élémentaires

Définition 4. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout couple $(i,j) \in (\llbracket 1\,;\, n \rrbracket)^2$, on appelle matrice élémentaire d'indices (i,j) et on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls saufs celui en i-ème ligne et j-ème position qui vaut 1. C'est-à-dire que :

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \quad\quad\quad j \\ \quad\quad\quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 5. Ces matrices s'appellent matrices élémentaires car elles permettent de décomposer toute matrice carré de taille n comme une combinaison linéaires de ces matrices élémentaires. En outre, une telle décomposition est unique. Nous verrons tout ceci au chapitre sur les espaces vectoriels. Plus spécifiquement si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on peut écrire :

$$A = \sum_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} a_{i,j} E_{i,j}.$$

Lemme 6 (Multiplication à gauche par une matrice élémentaire)**.** *Soit n et p deux entiers naturels non nuls fixés. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :*

$$E_{i,j}A = \begin{array}{c} \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & & a_{j,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que la i-ème ligne de la matrice $E_{i,j}A$ est la j-ème ligne de A et que les autres lignes sont nulles.

Corollaire 7. *Nous pouvons maintenant traduire chaque opérations élémentaires par la multiplication à gauche d'une certaine matrice. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de A. Alors :*

- *La permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $(I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j})$.*
- *La dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.*
- *La transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}$.*

Méthode 8. On reprend les notations précédentes. Lorsqu'on effectue une suite d'opérations élémentaires sur la matrice A, ceci revient à multiplier A à gauche par une matrice inversible.

Pour déterminer l'inverse de A, on peut alors essayer d'appliquer une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A jusqu'à obtenir l'identité.

Si cela est possible, la matrice A est alors inversible. Pour trouver A^{-1}, il suffit d'appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice identité.

4 Transposition

Définition 9. Soit n et p deux entiers naturels non nuls et $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de M et on note M^{T} la matrice $M^{\mathrm{T}} = \left(m'_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant p\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!],\ \forall j \in [\![1\,;\,n]\!],\ m'_{i,j} = m_{j,i}.$$

Attention ! Si A n'est pas une matrice carré, alors A et A^{T} sont des matrices de formats différents.

Proposition 10 (La transposition est linéaire)**.** *Soit A et B deux matrices de même format.*
Alors $(A+B)^{\mathrm{T}} = A^{\mathrm{T}} + B^{\mathrm{T}}$. Plus généralement, on a $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ (\alpha A + \beta B)^{\mathrm{T}} = \alpha A^{\mathrm{T}} + \beta B^{\mathrm{T}}$.

Proposition 11 (Transposition et produit)**.** *Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :*

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}.$$

Corollaire 12. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carré inversible, alors A^{T} est également inversible et $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.*

Lemme 13. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice carré de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M^{T} est de même format que M et :*

- *Si M est diagonale, alors M^{T} aussi et même $M^{\mathrm{T}} = M$.*
- *Si M est triangulaire supérieure, alors M^{T} est triangulaire inférieure et vice-versa.*

5 Trace des matrices carrées

Définition 14. Soit n un entier naturel non nul et $M = (m_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_{n,n}(\mathbb{K})$. On appelle trace de M et on note $\mathrm{Tr}(M)$ le scalaire défini par :

$$\mathrm{Tr}(M) = \sum_{k=1}^{n} m_{k,k}.$$

Attention ! Si A n'est pas une matrice carré, alors la trace de A n'a pas de sens.

Proposition 15 (La trace est linéaire)**.** *Soit A et B deux matrices carrées de même format. Alors* $\mathrm{Tr}(A+B) = \mathrm{Tr}(A) + \mathrm{Tr}(B)$*. Plus généralement, on a* $\forall(\alpha,\beta) \in \mathbb{C}^2,\ \mathrm{Tr}(\alpha A + \beta B) = \alpha \,\mathrm{Tr}(A) + \beta\,\mathrm{Tr}(B)$.

Attention ! Il n'existe pas de formule permettant de calculer la trace d'un produit AB à l'aide uniquement des valeurs de $\mathrm{Tr}(A)$ et $\mathrm{Tr}(B)$. On peut seulement écrire le lemme suivant.

Lemme 16. *Soit n et p deux entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$. Alors :*

$$\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA).$$

6 Puissances de matrices carrées

Définition 17. Soit A une matrice carrée à p lignes. Alors on définit les puissances de A par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} A^0 = I_p \\ \forall n \in \mathbb{N},\ A^{n+1} = A \cdot A^n. \end{cases}$$

Par ailleurs, si A est inversible, on définit également les puissances négatives par $\forall n \in \mathbb{N},\ A^{-n} = (A^{-1})^n$.

Proposition 18 (Propriétés élémentaires)**.** *Soit A une matrice carrée ; n et p deux entiers ainsi que λ un scalaire. Les égalité suivantes sont vérifiées dès qu'elles ont un sens :*

i) $A^{n+p} = A^p A^n = A^p A^n$

ii) $(\lambda A)^n = \lambda^n A^n$.

Proposition 19 (Puissance et inversibilité)**.** *Soit A une matrice carrée et $n \in \mathbb{N}$. Si A est inversible, alors A^n est également inversible et $(A^n)^{-1} = A^{-n}$.*

Attention ! En vertu de la non-commutativité du produit matriciel, on a en général $A^2B^2 \neq (AB)^2 = ABAB$.

Proposition 20 (Formule du binôme matricielle)**.** *Soit A et B deux matrices carrées de même format. On suppose de plus que les matrices commutent, c'est-à-dire que $AB = BA$. Alors :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ (A+B)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^k B^{n-k}.$$