Colles semaine 17

En bref

- Étude de suite récurrentes de type $u_{n+1} = f(u_n)$.
- Définition formelle des limites de fonctions.
- Théorème de composition de limite.
- Continuité des fonctions.
- Propriété des fonctions continues. Théorème des valeurs intermédiaires (sur un segment ou un intervalle ouvert).
- Extension aux fonctions à valeurs complexes. Une fonction f à valeurs complexes est continue si et seulement si $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ le sont.
- Algèbre linéaire : définition d'espaces vectoriels et de sous-espaces vectoriels.

Déroulé de la colle

Pour cette semaine, nous ferons colle en trois temps :

i) D'abord, on demandera à l'étudiant de déterminer si une partie donnée d'un espace vectoriel est ou non un sous-espace vectoriel. *Exemples traités en cours en fin de document*

ii) On poursuivra avec une question de cours choisies dans les exemples suivants
   - Citer le théorème de composition de limite (version fonctionnelle pour la limite de $g \circ f$ ou version séquentielle pour la limite de $f(u_n)$.
   - Étudier la continuité de la fonction $f : x \mapsto \begin{cases} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ \mathrm{e}^x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$ ou tout autre exemple du même genre.
   - Montrer à l'aide du théorème des valeurs intermédiaires que l'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.
   - Montrer que si f est une fonction continue strictement croissante bijective de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, alors sa bijection réciproque est continue.
   - Montrer que si f est une fonction continue à valeurs complexes, alors $\exp(f)$ est continue.
   - Montrer que si f est une fonction continue à valeurs complexes ne s'annulant pas, alors $\frac{1}{f}$ est continue.

iii) Enfin, on terminera avec l'étude d'une suite récurrentes. *On laissera le temps à l'étudiant de faire ses conjecture et de proposer un « plan de bataille » mais on le guidera ensuite autant que nécessaire si sa réflexion s'avère infructueuse.*

Note aux colleurs

- Pour l'étude des sous-espaces vectoriels (ou non), on se limitera à des cas vraiment simples pour lesquels l'application de la définition permet de conclure quasi-immédiatement.

En détail

1 Éléments d'études des suites récurrentes

Reprise du programme précédent, notamment :

Attention ! L'étudiant tournera sept fois sa craie dans sa main avant d'écrire des âneries lorsqu'il est confronté à un tel problème. En particulier, il veillera à ne pas confondre les propriétés de la fonction f et celles de la suite u.

2 Définirions des limites des fonctions

Reprise du programme précédent

3 Propriétés de limites de fonctions

3.0.1 Limites et ordre

Proposition 1. *Soit $a \in \mathbb{R}$ et f est une fonction de $I \to \mathbb{R}$ et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f admet une limite (finie ou infinie) ℓ en x_0 et que $\ell > a$. Alors il existe un voisinage de x_0 sur lequel, f est strictement supérieure à a. Autrement dit :*

$$\exists \alpha \in \mathbb{R}_+^*, \forall x \in I \cap]x_0 - \alpha\,; x_0 + \alpha[\,,\ f(x) > a.$$

Remarque 2. Comme pour les suites, il est crucial que l'inégalité $\ell > a$ soit stricte.

Proposition 3 (Passage à la limite des inégalités)**.** *Soit f et g deux fonctions définies sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité. On suppose que f et g admettent chacune une limite (finie ou infinie) en x_0, notée respectivement ℓ_f et ℓ_g. On suppose de plus que $\forall x \in I,\ f(x) \leqslant g(x)$. Alors $\ell_f \leqslant \ell_g$.*

Remarque 4. Bien sûr, il suffirait que l'inégalité $f(x) \leqslant g(x)$ soit vraie seulement sur un voisinage de x_0 et pas nécessairement sur I tout entier.

Théorème 5 (Théorème de limite monotone)**.** *Soit f une fonction croissante sur I et x_0 un point appartenant à I ou une extrémité.*

i) La fonction f admet une limite à gauche stricte en x_0 (qui peut être finie ou $+\infty$ si x_0 est la borne supérieure de I).

ii) La fonction f admet une limite à droite stricte en x_0 (qui peut être finie ou $-\infty$ si x_0 est la borne inférieure de I.

iii) Si de plus x_0 est un point intérieur à I, alors

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x < x_0}} f(x) \leqslant f(x_0) \leqslant \lim_{\substack{x \to x_0 \\ x > x_0}} f(x).$$

3.1 Composition de limites

Théorème 6 (Théorème de composition de limite (version fonctionnelle))**.** *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. On se donne deux fonctions $f : I \to \mathbb{R}$ et $g : J \to \mathbb{R}$. On suppose que $f(I) \subset J$, de sorte que la composée $g \circ f$ est bien définie. On se donne également un point x_0 appartenant à I ou qui est une extrémité de I. On suppose que $f(x) \xrightarrow{x \to x_0} \ell$. On suppose également que ℓ appartient à J ou est une extrémité de J et que $g(y) \xrightarrow{y \to \ell} L$.*

Alors la fonction $g \circ f$ admet une limite en x_0 et $(g \circ f)(x) \xrightarrow{x \to x_0} L$.

Remarque 7. Les valeurs de x_0, ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 8. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in J$ et que g est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $L = g(\ell)$.

Application 9. Ce théorème ainsi que la composition de limite permet de montrer qu'une bijection réciproque d'une fonction continue strictement monotone est encore continue.

Théorème 10 (Composition de fonction et de suites). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit également u une suite convergeant vers une limite ℓ. On suppose que ℓ appartient à I ou est une extrémité de I. On suppose enfin que f admet pour limite L en $x \to \ell$. Alors la suite $n \mapsto f(u_n)$ converge vers L.*

Remarque 11. Les valeurs de ℓ et L de ce théorème peuvent être infinies.

Remarque 12. Ce théorème est souvent utilisé dans le cas où $\ell \in I$ et que f est continue en ℓ. Dans ce cadre, on a $\lim_{n\to\infty} f(u_n) = f(\ell)$.

4 Continuité des fonctions

4.1 Définitions

Définition 13 (Continuité en un point). Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$. Soit $x_0 \in I$. On dit que f est continue en x_0 si elle admet une limite en x_0 et que $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

Définition 14 (Continuité sur un intervalle). Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ et J un intervalle inclus dans I. On dit que f est continue sur J si la restriction de f sur J est continue en chaque point de J.

4.2 Opérations sur les fonctions continues

Lemme 15 (L'ensemble des fonctions continues est stable par combinaison linéaire.). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions continues sur I.*

Alors, pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$, la fonction $(\alpha f + \beta g)$ est continue sur I.

Proposition 16. *Le produit de fonctions continues, le quotient de fonctions continues (si le dénominateur ne s'annule pas), la composition de fonctions continue sont encore des fonctions continues.*

4.3 Propriétés globales des fonctions continues

Théorème 17 (Théorème des valeurs intermédiaires). *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$. (On supposera également $f(a) < f(b)$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $f(a) \leqslant y \leqslant f(b)$, alors il admet un antécédent par f.*

Le théorème des valeurs intermédiaires admet un corollaire qui s'énonce très simplement.

Corollaire 18 (Image d'un intervalle). *Si f est une fonction continue sur un intervalle I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle.*

Remarque 19. La preuve de ce dernier corollaire nécessite d'admettre ou de prouver qu'un sous-ensemble I de $\mathbb{R}$ est un intervalle si et seulement si il est convexe.

Théorème 20 (Image d'un segment)**.** *Si f est une fonction continue sur un intervalle **fermé borné** I, alors l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé borné. (on parle aussi de segment pour désigner un intervalle fermé borné).*

Remarque 21. Si I est un intervalle mais pas un segment, alors $f(I)$ est un intervalle qui peut être de nature très différente de I. Le lecteur cherchera des exemples où I est borné mais pas $f(I)$, ou encore des exemples ou I est fermé mais pas $f(I)$, etc.

Corollaire 22. *Une fonction continue sur un segment est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, si I est un segment et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue, alors $\sup\limits_{x\in I} f(x)$ existe ainsi que $\inf\limits_{x\in I} f(x)$. De plus, il existe deux réels a et b appartenant à I tels que $f(a) = \sup\limits_{x\in I} f(x)$ et $f(b) = \inf\limits_{x\in I} f(x)$. Ces bornes supérieure et inférieure sont donc des maximum et minimum.*

Théorème 23 (Théorème des valeurs intermédiaires généralisé aux limites)**.** *Soit f une fonction continue sur I et a et b deux éléments de I avec $a < b$ (comprenant éventuellement le cas $a = -\infty$ ou $b = +\infty$). On suppose que f admet une limite en a et en b que l'on notent respectivement ℓ_a et ℓ_b.*

On supposera également $\ell_a < \ell_b$ par simple commodité d'écriture). Si y est un réel vérifiant $\ell_a < y < \ell_b$, alors il admet un antécédent par f.

4.4 Extension aux fonctions à valeurs complexes

Définition 24 (Limite de fonctions à valeurs complexe)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit également z un complexe.

— Pour x_0 un réel fini ; on dit que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists\delta > 0,\ \forall x \in I \cap [x_0 - \delta\,;\, x_0 + \delta]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{1}$$

— Pour $x_0 = +\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap [a\,;\, +\infty[\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{2}$$

— Pour $x_0 = -\infty$; on dit que $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = z$ si :

$$\forall\varepsilon > 0,\ \exists a \in \mathbb{R},\ \forall x \in I \cap]{-infty}\,;\, a]\,,\ |f(x) - z| \leqslant \varepsilon. \tag{3}$$

Théorème 25 (Théorème des gendarmes , version complexe)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$ et x_0 un réel de I ou une extrémité (éventuellement $x_0 = \inf(I)$ ou $x_0 = \sup(I)$). Soit enfin z un complexe.*

S'il existe une fonction réelle positive g vérifiant : $\begin{cases} \forall x \in I,\ |f(x) - z| \leqslant z \\ \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0 \end{cases}$; alors la fonction f admet pour limite z en x_0.

Application 26. Montrer que la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

Définition 27. Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Pour tout $x_0 \in I$, on dit que f est continue en x_0 si elle y admet une limite et si $f(x_0) = \lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

On dit que f est continue sur I si elle est continue en tout point de I

Lemme 28. *Pour deux fonctions f et g complexe continue sur un intervalle I, la somme $f+g$, le produit fg ou encore les combinaisons linéaires $\alpha f+\beta g$ pour tout $(\alpha,\beta)\in\mathbb{C}^2$ sont continues sur I.*

Proposition 29. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. La fonction f est continue sur I si et seulement si chacune des fonctions réelles $\mathrm{Re}(f)$ et $\mathrm{Im}(f)$ est continue sur I ou encore si et seulement si la fonction conjuguée $\bar{f}$ est continue.*

Lemme 30. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Si la fonction f est continue sur I, alors la fonction réelle $|f|$ est continue sur I.*

La réciproque est fausse en général.

Théorème 31 (Les fonctions continues sur un segment sont bornées)**.** *Soit a, b deux réels vérifiant $a<b$ et une fonction f continue sur le segment $[a\,;\,b]$ à valeurs complexe. Alors la fonction f est bornée et atteint sa borne sur le segment $[a\,;\,b]$. Autrement dit :*

$$\exists c\in[a\,;\,b]\,,\ \forall t\in[a\,;\,b]\,|f(t)|\,|f(c)|\,. \tag{4}$$

Proposition 32. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{C}$. Alors :*

- *La fonction $\exp(f)$ est continue sur I,*
- *si la fonction f ne s'annule pas, alors la fonction $\frac{1}{f}$ est continue sur I.*

5 Algèbre linéaire : espaces vectoriels et sous-espaces vectoriels

5.1 Définition des espaces vectoriels

Définition 33 (Espace vectoriel)**.** On appelle espace vectoriel sur K ou $\mathbb{K}$-espace vectoriel la donnée d'un triplet $(E,+,\cdot)$ où E est un ensemble non vide muni d'une addition $\begin{array}{ccc} E\times E & \to & E \\ (x,y) & \mapsto & x+y \end{array}$ et d'une multiplication externe $\begin{array}{ccc} \mathbb{K}\times E & \to & E \\ (\lambda,x) & \mapsto & \lambda\cdot x \end{array}$ vérifiant les huit axiomes suivants :

i) $\forall(x,y,z)\in E^3,\ (x+y)+z=x+(y+z)$. (L'addition est associative)

ii) $\forall(x,y)\in E^2,\ (x+y)=y+x$. (L'addition est commutative)

iii) $\exists e\in E,\ \forall x\in E,\ e+x=x+e=x$. (Il existe un élément neutre pour l'addition)

iv) $\forall x\in E,\ \exists x'\in E,\ x+x'=x'+x=e$. (Chaque élément admet un opposé)

v) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$. (La multiplication externe est associative)

vi) $\forall x\in E,\ 1\cdot x=x$. (Le scalaire 1 est neutre pour la multiplication externe).

vii) $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{K}^2,\ \forall x\in E,\ (\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$. (Distributivité de la multiplication externe sur l'addition des scalaires)

viii) $\forall\lambda\in\mathbb{K},\ \forall(x,y)\in E^2,\ \lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$. (Distributivité de la multi plication externe sur l'addition des vecteurs.)

5.2 Règles de calculs

Proposition-Définition 34. *Tout espace vectoriel admet par définition un élément neutre pour l'addition. C'est-à-dire un élément $e\in E$ vérifiant $\forall x\in E,\ x+e=e+x=x$. Cet élément est unique et s'appelle le vecteur nul de E. On le note très souvent 0_E.*

Proposition-Définition 35. *Tout vecteur x d'un espace vectoriel E admet par définition un opposé, c'est-à-dire un élément x' vérifiant $x' + x = x + x' = 0_E$. Cet élément est unique et se note normalement $-x$.*

Proposition 36 (Règles de calculs dans un espace vectoriel.)**.** *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel . Soit $x \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$; alors,*

$$\lambda \cdot x = 0_E \iff (\lambda = 0 \text{ ou } x = 0_E)\,.$$

Où 0_E est l'élément neutre pour l'addition du groupe $(E, +)$.

Par ailleurs :

$$(-\lambda \cdot x) = \lambda \cdot (-x) = -(\lambda \cdot x).$$

Où le signe "moins" fait référence à l'opposé dans le corps $\mathbb{K}$ pour le premier terme et à l'opposé dans l'espace vectoriel E pour les deux termes suivants.

5.3 Sous-espaces vectoriels

Définition 37. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. On dit que F est un sous-espace vectoriel de E s'il vérifie les trois conditions suivantes :

i) $0_E \in F$, où 0_E est l'élément neutre pour l'addition de l'espace vectoriel E ;

ii) $\forall (x, y) \in F^2,\ x + y \in F$,

iii) $\forall x \in F\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \lambda x \in F$, où l'on note dorénavant λx le résultat de la multiplication externe.

On traduit cela en disant que F est stable par addition et par multiplication externe.

Proposition 38. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F une partie de E. Alors F est un sous-espace vectoriel de E si et seulement s'il vérifie les deux conditions suivantes :*

i) *F est non vide,*

ii) $\forall \lambda \in \mathbb{K}\ \forall (x, y) \in F^2,\ \lambda x + y \in F$.

Lemme 39. *Un bon étudiant de PTSI sait déterminer en moins d'une minute si chacune des parties suivantes est ou non un sous-espace vectoriel.*

i) $\{(x, y, z) \in C^3 \mid x + 2y + \ iz = 0\}$ *dans* $\mathbb{C}$.

ii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

iii) L'ensemble des complexes imaginaires purs dans le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$?

iv) $\{z \in \mathbb{C} \mid \mid |z| \leqslant 1\}$ *dans* $\mathbb{C}$ *?*

v) L'ensemble des matrices symétriques dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$?

vi) L'ensemble des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

vii) L'ensemble des fonctions dérivables dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

viii) L'ensemble des fonctions bornées dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

ix) Soit $M \in \mathbb{R}_+$. L'ensemble des fonctions bornées par M dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

x) L'ensemble des fonctions paires dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xi) L'ensemble des fonctions croissantes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xii) L'ensemble des fonctions monotones dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$?

xiii) L'ensemble des suites convergentes dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

xiv) L'ensemble des suites convergentes vers 0 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

xv) L'ensemble des suites convergentes vers 1 dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?

Proposition 40. *Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et F et G deux sous-espaces vectoriels de E. Alors $F \cap G$ est encore un sous-espace vectoriel de E.*