

Colles semaine 23

En bref

- Définition de la dimension. Cardinal des bases, des familles génératrices, des familles libres.
- Dimension et somme de sous-espaces vectoriels : formule de Grassmann, nouvelles méthodes de preuve de supplémentarité.
- Rang d'une famille de vecteur. Cas des familles libres ou génératrices. Le rang est préservé par les opérations élémentaires. On en déduit un algorithme de détermination du rang par élimination successive de vecteurs combinaison linéaire des autres vecteurs.
- Notion de famille échelonnée sur une autre. Cette opération préserve le caractère libre ou générateur des familles.
- Rang des applications linéaires. Théorème du rang.
- Miracle des endomorphismes **en dimension finie** : les endomorphismes injectifs sont exactement les endomorphismes surjectifs.
- Si $(e_1, \dots, e_n)$ est une base de E et f une application linéaire sur E , alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.
- Si f est une application linéaire entre E et F , alors $\text{rg}(f) \leq \min(\dim E, \dim F)$. Cas d'égalité.
- Lien entre le rang et la composition.
- Une application linéaire est entièrement caractérisée par ses images sur une base. Conséquence sur la dimension de $\mathcal{L}(E, F)$.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- i) Montrer que si la somme $F + G$ est directe ; alors $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$.
- ii) Montrer que si $\dim(F + G) = \dim(F) + \dim(G)$, alors la somme $F + G$ est directe.
- iii) Montrer que les opérations élémentaires sur les familles préservent le rang.
- iv) Montrer que $\text{rg}(u \circ w) \leq \text{rg}(u)$. Que dire si w est un isomorphisme ?
- v) Montrer que $\text{rg}(u \circ w) \leq \text{rg}(w)$. Que dire si u est un isomorphisme ?
- vi) Montrer que si $(e_1, \dots, e_n)$ est une famille libre de E et si f est linéaire injective, alors $(f(e_1), \dots, f(e_n))$ est libre.
- vii) Montrer que si f et g sont deux applications linéaires coïncidant sur une base, alors elles sont égales.

Notes aux colleurs

- Bien que nous nous en approchions très près cette semaine, la représentation matricielle des applications linéaires n'a pas encore été introduite.
- Le terme « hyperplan » n'est pas au programme.
- Si l'on cherche à meubler cinq minutes en fin de colles, on pourra poser une question combinatoire. Nous avons en effet fait une brève approche du dénombrement pour préparer le futur chapitre de probabilité.

En détail

Dimension des espaces vectoriels

Reprise du programme précédent avec en plus :

1 Rang des applications linéaires

1.1 Définitions et généralités

Définition 1 (Rang d'une application linéaire). Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels. On appelle *rang* de f et on note $\text{rg}(f)$ la dimension du sous-espace vectoriel $\text{Im}(f)$.

Remarque 2. Si $\text{Im}(f)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de dimension finie, on dit simplement que le rang de f est infini.

Proposition 3 (Image d'une famille par une application linéaire). Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels et soit $\mathcal{C} = (a_1, \dots, a_p)$ une famille de vecteurs de E . On note alors $f(\mathcal{C}) := (f(a_1), \dots, f(a_p))$ la famille de vecteurs de F constituée des images de $\mathcal{C}$.

- Si la famille $\mathcal{C}$ est liée, alors $f(\mathcal{C})$ est liée.
- Si la famille $\mathcal{C}$ est libre et si f est injective, alors la famille $f(\mathcal{C})$ est libre.
- Si la famille $\mathcal{C}$ est génératrice de E , alors la famille $f(\mathcal{C})$ est génératrice de $\text{Im}(f)$.

Corollaire 4. Soit $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels (avec $\dim(E) = n$) et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E . Alors $\text{rg}(f) = \text{rg}(f(e_1), \dots, f(e_n))$.

Corollaire 5. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies et $f : E \rightarrow F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors :

- i) $\text{rg}(f) \leq \dim(F)$ avec égalité si et seulement si la fonction f est surjective.
- ii) $\text{rg}(f) \leq \dim(E)$ avec égalité si et seulement si la fonction f est injective.

1.2 Le théorème du rang et ses conséquences

Proposition 6 (Point de vue géométrique du théorème du rang). Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. On se donne H un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\text{Ker}(f)$ dans E . Alors, la restriction de f à H induit un isomorphisme d'espaces vectoriels entre H et $\text{Im}(f)$.

Théorème 7 (Théorème du rang). Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Alors on a la formule :

$$\dim(\ker f) + \text{rg}(f) = \dim(E)$$

Remarque 8. Ce théorème reste en fait valable si F est de dimension infinie. En revanche, il est crucial que E soit de dimension finie.

Corollaire 9. Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions finies $f : E \rightarrow F$ une application linéaire. Si deux des trois propositions suivantes sont vérifiées, alors la troisième l'est aussi et dans ce cas, f est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

- i) f est injective.
- ii) f est surjective.
- iii) $\dim(E) = \dim(F)$.

Corollaire 10 (Miracle des endomorphismes en dimension finie). Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Un endomorphisme de E est injectif si et seulement si il est surjectif.

2 Conséquences structurelles

2.1 L'espace vectoriel $\mathcal{L}(E, F)$

Notation 11. Si E et F sont deux espaces vectoriels, on note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des morphismes d'espaces vectoriels de E vers F . Lorsque $E = F$, on note simplement $\mathcal{L}(E)$ au lieu de $\mathcal{L}(E, E)$. Enfin, on note $\text{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E (c'est-à-dire l'ensemble des endomorphismes bijectifs.)

Lemme 12. Soit E et F deux espaces vectoriels. L'ensemble $\mathcal{L}(E, F)$ des applications linéaires de E dans F est un sous-espace vectoriel de l'ensemble F^E des applications de E dans F .

Attention ! L'ensemble $\text{GL}(E)$ n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.

2.2 Cas de la réciproque

Proposition 13. Soit $f : E \rightarrow F$ un isomorphisme (donc une application bijective) d'espaces vectoriels. Alors la réciproque f^{-1} est encore un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Définition 14. Soit E et F deux espaces vectoriels. On dit que E est isomorphe à F s'il existe un isomorphisme d'espaces vectoriels entre E et F .

Remarque 15. Le résultat sur la réciproque des isomorphismes permet d'affirmer que E est isomorphe à F si et seulement si F est isomorphe à E .

2.3 Composition

Proposition 16 (La composée d'applications linéaire est encore linéaire). Soit E, F et G trois espaces vectoriels ainsi que $f : E \rightarrow F$ et $g : F \rightarrow G$. Si f et g sont linéaires, alors l'application $g \circ f$ est linéaire.

Proposition 17 (Rang des composées). Soit E, F et G trois espaces vectoriels ainsi que $f \in \mathcal{L}(E, F)$ et $g \in \mathcal{L}(F, G)$. Alors :

- $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(f)$ avec égalité notamment (mais pas uniquement) lorsque g est injective.
- $\text{rg}(g \circ f) \leq \text{rg}(g)$ avec égalité notamment (mais pas uniquement) lorsque f est surjective.

2.4 Caractérisation d'une application linéaire par son image sur une base

Proposition 18. Soit E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Alors, l'application suivante est un isomorphisme d'espaces vectoriels :

$$\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & F^p \\ f & \mapsto & (f(e_1), \dots, f(e_p)) \end{array} \quad (1)$$

Corollaire 19. Si E et F sont deux espaces vectoriels, chacun de dimension finie, alors :

$$\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim(E) \times \dim(F).$$

Lemme 20. Soit E et F deux espaces vectoriels. On suppose que E est de dimension finie et on note $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E . Alors pour tout p -uplet $y_1, \dots, y_p$ d'éléments de F , il existe une et une unique application linéaire f vérifiant :

$$\begin{cases} f(e_1) = y_1 \\ \vdots \\ f(e_p) = y_p \end{cases}$$