Colles semaine 26

En bref

- Variables aléatoires :
  - Définition, sommes, produit, etc.
  - Loi des variables aléatoires (sur les univers finis).
  - Lois usuelles : uniformes, de Bernoulli et binomiale.
  - Espérance et variance. Calcul pour les lois usuelles. Linéarité de l'espérance.
  - Première introduction à l'indépendance des variables aléatoires.
- Représentation matricielle en dimension finie :
  - Matrices d'un (ou une famille de) vecteurs dans une base.
  - Matrice de changement de bases. Formule de changement de base pour les coordonnées.
  - Matrice d'une application linéaire dans des bases fixées.
  - Formules de changement de bases pour les matrices d'application linéaires. Compatibilité entre le produit matriciel et la composition d'application linéaire.
  - Rang d'une matrice : c'est le rang de n'importe quelle application linéaire représenté par cette matrice.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

i) Définir la variance et montrer que $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}\left(X\right)^2$.

ii) Définir la loi uniforme (ou de Bernoulli ou binomiale). Faire le calcul explicite de l'espérance et de la variance associée.

iii) Montrer que les matrices de changement de bases sont inversibles et que $\left(P_{\mathcal{B},\mathcal{C}}\right)^{-1} = P_{\mathcal{C},\mathcal{B}}$.

iv) Montrer que $\mathrm{Mat}(u \circ w) = \mathrm{Mat}(u)\,\mathrm{Mat}(w)$ en précisant dans quelles bases les matrices sont déterminées pour rendre la formule correcte.

v) Montrer la formule $\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f) P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$.

Notes aux colleurs

- Pour les matrices d'applications linéaire, on se contentera de questions de cours ou de questions très basiques comme déterminer la matrice d'une application donnée dans des bases donnée. Ou réciproquement, déterminer une application linéaire dont la matrice dans certaine base est donnée.
- La notation relative aux matrices d'applications linéaires n'est pas fixée par le programme. On n'hésitera pas à redemander des définitions précises aux étudiants en cas d'ambiguïtés sur la notation. J'ai essayé de choisir les notations dans lesquelles les formules sont le plus simples à retenir.

En détail

Variables aléatoires

Reprise du programme précédent

Étude systématique des applications linéaires en dimension finie

1 Prologue : retour sur les coordonnées

1.1 Matrice des coordonnées d'un vecteur ou d'une famille de vecteurs

Proposition-Définition 1. *Soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors pour tout vecteur $x \in E$, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ telle que $x = \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_i e_i$. Cette famille $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ est appelée* les coordonnées *du vecteur x dans la base $\mathcal{B}$.*

On appelle matrice des coordonnées de x dans la base $\mathcal{B}$*, la matrice-colonne suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x) = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

Définition 2 (Coordonnées d'une famille de vecteur)**.** On se donne encore une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ainsi qu'une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E. On appelle alors *matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base $\mathcal{B}$* la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont la j-ième colonne est constituée de la matrice des coordonnées du vecteur x_j dans la base $\mathcal{B}$. On note cette matrice $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$.

On peut traduire cette définition de manière plus explicite :

Lemme 3. *On se donne encore une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E ainsi qu'une famille $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ de vecteurs de E. Alors, il existe une unique famille de scalaires $(\lambda_{i,j})_{i\in[\![1\,;\,n]\!],\, j\in[\![1\,;\,p]\!]}$ vérifiant :*

$$\forall j \in [\![1\,;\,p]\!],\ x_j = \sum_{i=1}^{n} \lambda_{i,j} e_i$$

Dans ce cas $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F})$ est la matrice dont le coefficient en position $(i;j)$ vaut $\lambda_{i,j}$.

1.2 Matrice de changement de bases

Définition 4. Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E. On appelle matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ et on note $P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$ la matrice de la famille $\mathcal{B}'$ dans la base $\mathcal{B}$.

Remarque 5 (Moyen mnémotechnique pour l'expression des matrices de passage). Soit E un espace vectoriel de dimension n et soit $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ et $\mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases de E.

La matrice de passage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$ est celle qui correspond à la décomposition des vecteurs de la *nouvelle* base sur *l'ancienne* base. Autrement dit, il convient de penser la matrice de passage de la manière suivante :

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \begin{array}{r} \\ \\ e_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ e_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} e'_1 & \dots & e'_n \\ \downarrow & & \downarrow \end{array} \\ \begin{pmatrix} \cdot & & \cdot \\ & \ddots & \\ \cdot & & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

En effet la première colonne de cette matrice correspond bien à la matrice des coordonnées de e'_1 dans la base $\mathcal{B}$.

Proposition 6. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$ est inversible et son inverse est la matrice de massage de $\mathcal{B}'$ à $\mathcal{B}$. Autrement dit,*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}{}^{-1} = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}$$

2 Représentation matricielle d'endomorphismes

2.1 Une remarque éclairante

Lemme 7. *Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $(x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E et $(\lambda_1, \dots, \lambda_p)$ une famille de scalaires. Alors :*

$$g\left(\sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k\right) = \sum_{j=k}^{p} \lambda_k g(x_k).$$

Remarque 8. Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $(e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_n)$ une base de F. Alors, pour chaque $k \in [\![1\,;\,p]\!]$, il existe des coefficients $(m_{i,k})_{i\in[\![1\,;\,n]\!]}$ tels que $g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} f_i$. C'est-à-dire que $(m_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant k\leqslant p}} = \mathrm{Mat}_{(f_1,\dots,f_n)}((g(e_1), \dots, g(e_p))$

Par ailleurs, pour tout vecteur $x \in E$, il existe des coefficients $(\lambda_k)_{k\in[\![1\,;\,p]\!]}$ tel que $x = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k e_k$. C'est-à-dire que $(\lambda_k)_{k\in[\![1\,;\,p]\!]} = \mathrm{Mat}_{(e_1,\dots,e_p)}(x)$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} g(x) &= \sum_{k=1}^{p} \lambda_k g(e_k) = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} f_i \\ &= \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{p} m_{i,k} \lambda_k \right) f_i \end{aligned}$$

On interprète bien sûr le réel $\sum_{k=1}^{p} m_{i,k}\lambda_k$ comme le coefficient d'un produit matriciel.

2.2 Définition

Définition 9 (Matrice d'une application linéaire)**.** Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit également $\mathcal{B}_E = (e_1, \dots, e_p)$ une base de

E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F. On sait alors que l'on dispose d'une unique famille de scalaires $(m_{i,k})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant j}}$ vérifiant :

$$\forall k \in [\![1\,;\,p]\!],\ g(e_k) = \sum_{i=1}^{n} m_{i,k} f_i$$

Alors la matrice

$$M := \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$$

s'appelle la matrice de l'application g dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$. On la note généralement $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$.

Corollaire 10. *Si g est une application linéaire entre E et F munis des bases respectives $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ et que l'on pose $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$, alors le format de M dépend des dimensions de E et F. Le nombre de lignes est égal à $\dim(F)$ et le nombre de colonnes à $\dim(E)$.*

Remarque 11. Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. On note $p = \dim(E)$ et $n = \dim(F)$. Soit également $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $\mathcal{B}_F = (f_1, \dots, f_n)$ une base de F.

Il convient de penser la matrice de g dans les bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ de la manière suivante :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g) = \begin{array}{r} \\ \\ f_1 \longleftarrow \\ \vdots \\ f_n \longleftarrow \end{array} \begin{array}{c} \quad g(e_1) \quad \dots \quad g(e_p) \\ \begin{pmatrix} \downarrow & & \downarrow \\ \cdot & & \cdot \\ & \ddots & \\ \cdot & & \cdot \end{pmatrix} \end{array}$$

En effet, la première colonne de cette matrice correspond bien aux coordonnées du vecteur $g(e_1)$ décomposé dans la base $(f_1, \dots f_n)$.

2.3 Action des changements de bases

2.3.1 Représentation matricielle et coordonnées

Nous pouvons maintenant expliciter tout le génie de la remarque 8 dans la proposition suivante :

Proposition 12. *Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Soit enfin x un vecteur de E. On note $X = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$ et $M = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)$ et enfin $Y = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(x))$. Alors :*

$$Y = MX \quad \text{, autrement dit} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F}(g(x)) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_E}(x)$$

Proposition 13 (matrices et composition)**.** *Soit E, F et G trois espaces vectoriels munis de bases respectives $\mathcal{B}_E$, $\mathcal{B}_F$ et $\mathcal{B}_G$. Soit également $f : E \to F$ et $g : F \to G$ une application linéaire. Alors on peut exprimer la matrice de l'application $g \circ f$ par la formule suivante*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_E}(g \circ f) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_G,\mathcal{B}_F}(g)\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f)$$

2.3.2 Représentation matricielle et changement de bases

Commençons par une remarque anodine

Lemme 14. *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E. Alors la matrice de passage de la base $\mathcal{B}$ à la base $\mathcal{B}'$ est exactement la matrice de l'application* identité *dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$. Autrement dit :*

$$P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}(\mathrm{id}_E).$$

Proposition 15 (Changement de bases pour les coordonnées)**.** *Soit $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E et x un vecteur de E. Le lien entre les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$ et celles dans $\mathcal{B}'$ est donnée à l'aide des matrices de passage par la formule suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}'}(x) = P_{\mathcal{B}',\mathcal{B}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(x).$$

Proposition 16 (Changement de bases et matrice d'applications linéaires)**.** *Soit $g : E \to F$ un morphisme de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Soit également $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ deux bases de E ainsi que $\mathcal{C}$ et $\mathcal{C}'$ deux bases de F. Alors, on a l'égalité suivante :*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{C}',\mathcal{B}'}(f) = P_{\mathcal{C}',\mathcal{C}}\,\mathrm{Mat}_{\mathcal{C},\mathcal{B}}(f)P_{\mathcal{B},\mathcal{B}'}$$

3 Conséquences théoriques de ce nouveau point de vue

3.1 Structure de $\mathcal{L}(E,F)$

Proposition 17 (Rappel)**.** *Soit E un espace vectoriel de dimension p et F un autre espace vectoriel (éventuellement de dimension infinie. Soit également $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ une base de E et $(f_1, \dots, f_p)$ une famille (pas nécessairement une base) de vecteurs de F. Alors il existe une et une unique application linéaire $\varphi : E \to F$ vérifiant :*

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!],\ \varphi(e_i) = f_i.$$

Proposition 18. *Soit E et F deux espaces vectoriels de dimensions respectives p et n. On se fixe $\mathcal{B}_E$ une base de E et $\mathcal{B}_F$ une base de F. Alors pour toute matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, il existe une et une unique application linéaire $f : E \to F$ telle que*

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) = M$$

Cette application est appelée application linéaire associée à M relativement aux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$.

Enfin prenons maintenant un peu de hauteur sur ce qu'on vient de voir. Si on se fixe deux bases $\mathcal{B}_E$ et $\mathcal{B}_F$ respectivement de E et de F; on peut maintenant définir une application $\Phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,F) & \to & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ f & \mapsto & \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_F,\mathcal{B}_E}(f) \end{array}$. La proposition précédente affirme que cette application est bijective. Mais en fait, on a montré beaucoup plus précis que ceci au cours de ce chapitre :

Théorème 19. *L'application Φ décrite ci-dessus est un isomorphisme d'espaces vectoriels !*

Corollaire 20 (dimension de $\mathcal{L}(E,F)$)**.** *Si E et F sont de dimensions respectives p et n, alors l'espace vectoriel $\mathcal{L}(E,F)$ est de dimension np.*

Définition 21. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle application linéaire canoniquement associée à A, l'unique application $\varphi_A : \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \to \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ dont la matrices dans les bases canonique des espaces vectoriels $\mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ et $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ est la matrice A.

Il s'agit tout simplement de l'application

$$\varphi_A : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}.$$

3.2 Rang des matrices

3.2.1 Définition

Définition 22 (Rappels)**.** Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est défini comme le rang de la famille de ses colonnes (vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$).

Le rang d'une application linéaire est défini comme la dimension de son image.

Théorème 23. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F. La matrice de f dans ces bases a le même rang que f.*

Corollaire 24. *Si $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors $\operatorname{rg}(M) \leqslant \min(n,p)$.*

Théorème 25 (Admis par le programme)**.** *Une matrice et sa transposée ont même rang*

Corollaire 26. *Le rang d'une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est également égal au rang de la famille de ses lignes (vues comme vecteurs de $\mathcal{M}_{1,p}(\mathbb{K})$).*

3.3 Noyaux et images des matrices

Définition 27. Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle noyau (respectivement image) de A et on note $\operatorname{Ker}(A)$ le noyau (respectivement l'image) de l'application linéaire canoniquement associée à A définie à la définition 21.

Autrement dit :

$$\operatorname{Ker}(A) = \{X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0_{n,1}\} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{Im}(A) = \{AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K})\}.$$

Théorème 28. *Soit $f : E \to F$ un morphisme d'espaces vectoriels. Alors pour toutes bases $\mathcal{B}_E$ de E et $\mathcal{B}_F$ de F. Soit M la matrice de f dans ces bases. Alors, on a une correspondance entre le noyau de f et celui de M donnée par l'équivalence suivante :*

$$\forall u \in E,\ (u \in \operatorname{Ker}(f)) \iff (\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}_E}(u) \in \operatorname{Ker}(M))$$

Proposition 29 (Théorème du rang pour les matrices)**.** *Soit A une matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors* $\dim(\operatorname{Ker}(A)) + \operatorname{rg}(A) = p$