Colles semaine 3

En bref

- Généralités, traduction logique des propriétés impliquant les antécédents ou images.
- Graphe des fonctions. Interprétation géométrique de la parité, l'imparité et de la périodicité des fonctions.
- Calcul de dérivée, d'une somme, d'un produit, d'un quotient, d'une composée de fonction dérivable.
- Étude de la dérivée d'une fonction en vue de tracer l'allure de son graphe.
- Asymptote à la courbe représentative d'une fonction.
- Fonction exponentielle définie comme l'unique solution de $\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$ (existence admise), propriétés élémentaires.
- Fonction logarithme définie comme réciproque de l'exponentielle. Propriétés de calculs et dérivée.
- Notation a^b pour $b \in \mathbb{R}$ et $a \in \mathbb{R}_+^*$. Propriétés des fonctions puissances.
- Intégration. Nous admettons que **sur un intervalle** :
  - les fonctions continues admettent des primitives,
  - les primitives de la fonctions nulles sont exactement les constantes,
  - la fonction $x \mapsto \int\limits_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f s'annulant en a.

  On démontre toutes les propriétés de l'intégration à partir de ceci. En particulier :
  - Relation de Chasles, propriété de positivité et croissance de l'intégrale.
  - Formule d'intégration par parties.
  - **À partir de mercredi seulement :** Formule de changement de variable.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Montrer que $\exp(a+b) = \exp(a)\exp(b)$.
- Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$.
- En admettant que la fonction logarithme est dérivable, démontrer l'expression de sa dérivée.
- Calculer $\int_0^2 t^2 \mathrm{e}^t \mathrm{d}t$ ou un exemple approchant. *Le colleur suggèrera au besoin une intégration par parties mais l'étudiant devrait y penser spontanément.*
- **À partir de mercredi seulement :** Calcul de $\int\limits_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$. Interprétation géométrique ?
- **À partir de mercredi seulement :** Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int\limits_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$. *On pourra poursuivre en calculant la valeur de l'intégrale mais cela dépasse alors la simple question de cours.*

Note aux colleurs

Pour cette première semaine de colle, tout changement de variable nécessaire pour le calcul d'une intégrale sera préalablement suggéré aux étudiants. On s'interdira tout changement de variables pour les colles de lundi.

En détail

1 Généralités

1.1 Définitions

Définition 1 (fonction réelle de la variable réelle)**.** On appelle *fonction à valeurs réelle de la variable réelle* la donnée :
— de E, un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ appelée *ensemble de définition de la fonction* ;
— et pour tout élément x appartenant à E, d'un unique réel appelé *image de x par la fonction.*

Notation 2. Si la fonction se note f, alors on note généralement $\mathcal{D}_f$ l'ensemble de définition de f ; et pour tout élément $x \in \mathcal{D}_f$, on note $f(x)$, l'image de x par la fonction f.

Remarque 3. La donnée de l'ensemble de définition fait normalement partie de la définition de la fonction f. Néanmoins on définit parfois une fonction f à l'aide d'une expression $f(x)$ sans préciser de domaine de définition $\mathcal{D}_f$. Dans ce cas, il est sous-entendu que $\mathcal{D}_f$ est l'ensemble des x réels pour lesquels l'expression $f(x)$ est bien définie. On dit que c'est le domaine de définition maximal de l'expression $f(x)$.

Méthode 4. Pour déterminer un domaine de définition sous-entendu, il suffit en général (mais pas toujours) de faire attention aux trois problèmes suivants :
— Un dénominateur ne peut être nul. Cas de $f : x \mapsto \dfrac{1}{x^2-4}$.
— L'argument d'une racine carré doit être positif ou nul. Cas de $g : x \mapsto \sqrt{x^2-3x+2}$.
— L'argument d'un logarithme doit être strictement positif. Cas de $h : x \mapsto \ln(-2x^2+6x-4)$.

Définition 5. Soit f une fonction à valeur réelle définie sur un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ noté $\mathcal{D}_f$. Soit également y un réel. Alors on appelle *antécédent de y par f*, tout élément x vérifiant $x \in \mathcal{D}_f$ et $f(x) = y$.

Attention ! Évidemment, on ne confondra pas image et antécédent. On remarquera d'ailleurs qu'un élément de l'ensemble de définition d'une fonction admet nécessairement *une et une unique* image. En revanche un réel peut n'admettre aucun, ou un unique, ou plusieurs antécédents par une fonction donnée.

1.2 Composition

Définition 6 (Composition de fonction)**.** Soit E, F et G trois ensembles et $f : E \to F$ une fonction et $g : F \to G$ une autre fonction. On appelle composée de f par g et on note $g \circ f$, la fonction définie ainsi :

$$g \circ f : \begin{array}{ccc} E & \to & G \\ x & \mapsto & g(f(x)) \end{array}.$$

Remarque 7. En général $f \circ g \neq g \circ f$. On remarquera d'ailleurs, selon les domaines de définition, que l'une de ces deux fonctions peut être bien définie sans que la deuxième le soit. Le lecteur dubitatif méditera l'exemple des fonctions $f : x \mapsto -x^2$ et $g : x \mapsto \sqrt{x}$.

1.3 Sens de variations

Définition 8 (croissance, décroissance, monotonie)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
— On dit que f est croissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \big(x \leqslant y\big) \Rightarrow \big(f(x) \leqslant f(y)\big).$$

— On dit que f est strictement croissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \big(x < y\big) \Rightarrow \big(f(x) < f(y)\big).$$

— On dit que f est décroissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \big(x \leqslant y\big) \Rightarrow \big(f(x) \geqslant f(y)\big).$$

— On dit que f est strictement décroissante sur I si elle vérifie :

$$\forall (x,y) \in I^2,\ \big(x < y\big) \Rightarrow \big(f(x) > f(y)\big).$$

— On dit que f est (strictement) monotone si elle est (strictement) croissante ou (strictement) décroissante sur I.

Proposition 9. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Si f est strictement monotone sur I alors chaque réel admet au plus un antécédent par f. C'est-à-dire que la fonction f vérifie l'assertion suivante :*

$$\forall (x,x') \in \mathbb{R}^2,\ \big(f(x) = f(x')\big) \implies \big(x = x'\big).$$

On dit dans ce cas que la fonction f est injective. *Nous étudierons plus en détail cette notion d'injectivité dans les prochains chapitres.*

Corollaire 10. *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction strictement monotone sur I. Alors, tout réel admet* ***au plus*** *un antécédent par f. C'est-à-dire que si un réel y admet un antécédent par f, alors cet antécédent est unique.*

Thèmes de réflexions 11. Le corolaire précédent donne un critère pour prouver *l'unicité* d'un antécédent. Connaît-on une autre propriété des fonctions qui entraîne dans certains cas *l'existence* d'un antécédent ?

Définition 12 (fonctions, majorées, minorées, bornées, minimums et maximums)**.** Soit I un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeurs réelles.
— Pour tout réel M, on dit que M est un majorant de f sur I si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \leqslant M$. On dit simplement que *la fonction f est majorée* s'il existe un majorant de f sur I.
— Pour tout réel M, on dit que m est un minorant de f sur I si $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) \geqslant m$. On dit simplement que *la fonction f est majorée* s'il existe un minorant de f sur I.
— On dit que f est bornée sur I si $\exists B \in \mathbb{R},\ \forall x \in I,\ |f(x)) \leqslant B$.
— Pour tout réel M, on dit que M est un maximum de f sur I si M est un majorant de f sur I et qu'il admet un antécédent par f sur I.
— Pour tout réel m, on dit que m est un minimum de f sur I si m est un minorant de f sur I et qu'il admet un antécédent par f sur I.

1.4 Point de vue géométrique

1.4.1 Graphe des fonctions

Définition 13 (Graphe d'une fonction réelle)**.** Soit f une fonction défini sur $\mathcal{D}_f$ un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et à valeurs réelles. Soit également $(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère du plan. On appelle *graphe de f* ou *courbe représentative de f* dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ l'ensemble des points de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ lorsque x parcourt l'ensemble $\mathcal{D}_f$.

1.4.2 Symétrie, parité, imparité

Définition 14 (Parité, imparité)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ symétrique par rapport à 0. C'est-à-dire que $\forall x \in I,\ -x \in I$. Soit également $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction. Alors on dit que :
— f est paire si $\forall x \in I,\ f(-x) = f(x)$;
— f est impaire si $\forall x \in I,\ f(-x) = -f(x)$.

Exemple 15. La fonction $x \mapsto x^2$ est paire. Plus généralement, pour tout entier n, la fonction $x \mapsto x^n$ est paire si l'entier n est pair et est impaire si n est impair. La fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ n'est ni paire ni impaire car son domaine de définition n'est pas symétrique par rapport à 0. La fonction $x \mapsto e^x$ est également ni paire ni impaire bien que son domaine de définition soit symétrique par rapport à 0.

Proposition 16. *Soit f une fonction réelle de la variable réelle et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ orthonormé.*

— *La fonction f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la symétrie axiale d'axe (Oy).*
— *La fonction f est paire si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la symétrie centrale de centre O (Ou, c'est la même chose, invariante par la rotation de centre O et d'angle π.)*

Définition 17 (fonction périodique)**.** Soit E un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ et $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction. On dit que f est périodique si :

$$\exists T \in \mathbb{R}_+^*, \ \forall x \in E, \ \Big(x + T \in E \text{ et } f(x+T) = f(x)\Big).$$

Remarque 18. Un réel strictement positif T vérifiant la condition ci-dessus est appelé une période de f. Si f est périodique, elle admet toujours une infinité de période. Lorsqu'il existe une plus petite période pour la fonction f, on parle parfois abusivement de *la* période de la fonction.

Exemple 19. Les fonctions sinus et cosinus et tangente sont 2π-périodiques (et également 4π-périodiques, 100π-périodiques, etc.)

La fonction tangente est également π-périodique.

Là encore, cette propriété possède une interprétation géométrique à connaître.

Proposition 20. *Soit f une fonction réelle définie sur $\mathbb{R}$ tout entier et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ ainsi que T un réel strictement positif.*

La fonction f est T-périodique si et seulement si sa courbe $\mathcal{C}_f$ est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

Remarque 21. Si l'ensemble de définition de la fonction n'est pas $\mathbb{R}$ entier, et que la fonction f est T-périodique, alors la translation du graphe de f peut donner un sous-ensemble strict du graphe initial. Prendre l'exemple de la fonction $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+ & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ pour s'en convaincre.

1.5 Asymptote

Définition 22 (Asymptote verticale)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ et a un réel de sorte que $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x < a}} = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x > a}} = \pm\infty$ alors on dit que la droite d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe représentative de f.

Définition 23 (Asymptote horizontale ou oblique)**.** Soit f une fonction définie sur un intervalle non majoré de $\mathbb{R}$. Soit également (a, b) un couple de réel. On dit que la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote à la courbe représentative de f au voisinage de $+\infty$ si $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax - b) = 0$.

Proposition 24. *Pour une fonction f donnée, l'asymptote au voisinage de $+\infty$, si elle existe est unique. Dans ce cas, les paramètres (a, b) de la définition précédente se calculent avec $a = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x}$ et $b = \lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - ax)$.*

2 Dérivation

Nous admettons que le lecteur est familier avec la notion de limite.

2.1 Définition grossière

Définition 25 (Nombre dérivée)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$, $a \in I$ et $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction.
On dit que f *est dérivable en a* si l'application

$$\tau_a \ : \ \begin{array}{ccc} I - \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \end{array}$$

admet une limite finie en a. Dans ce cas, cette limite s'appelle *le nombre dérivé de* f *en* a et se note $f'(a)$ ou $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(a)$.

Remarque 26. Avec les notations de la définitions précédentes, si f est dérivable en a, on a donc, quitte à changer de variable.

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \quad \text{ou encore} \quad f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Proposition 27 (Dérivable implique continue). *Si $f : I \to \mathbb{R}$ est dérivable en $a \in I$, alors, f est continue en a.*

Remarque 28. Attention la réciproque est fausse. Exemple de $x \mapsto |x|$ qui est continue en 0 mais n'est pas dérivable en 0.

2.2 Règles de calcul

Proposition 29 (Opérations algébriques). *Soient $f, g : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions dérivables en un point a de I.*

i) Pour tout $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ la combinaison linéaire $\alpha f + \beta g$ est dérivable en a et

$$(\alpha f + \beta g)'(a) = \alpha f'(a) + \beta g'(a)$$

ii) Le produit fg est dérivable en a et

$$(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$$

iii) Si g ne s'annule pas en a, l'inverse $\frac{1}{g}$ est défini sur un voisinage de a, est dérivable en a et

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(a) = \frac{-g'(a)}{g^2(a)}$$

iv) Si g ne s'annule pas en a, le quotient $\frac{f}{g}$ est défini sur un voisinage de a et est dérivable en a et

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(a) = \frac{f'(a)g(a) - f(a)g'(a)}{g^2(a)}$$

Proposition 30 (Dérivée d'une composition). *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$ ainsi que $f : I \to J$ et $g : J \to \mathbb{R}$ deux applications et $a \in I$. Si f est dérivable en a et si g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et*

$$(g \circ f)'(a) = g'\left(f(a)\right) \times f'(a).$$

2.3 Tableau de variations

Nous rappelons maintenant l'un des théorèmes fondamentaux sur la dérivation qui sera démontré dans le chapitre idoine.

Théorème 31 (Lien entre sens de variations et signe de la dérivée). *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction de I dans $\mathbb{R}$. Si f' est une fonction (strictement) positive sur I, alors f est (strictement) croissante sur I. De même, si f' est (strictement) négative, alors f est (strictement) décroissante.*

Attention ! Il est crucial dans le théorème précédent que I soit un intervalle. Pensez à l'exemple de la fonction inverse sur $\mathbb{R}^*$.

Ce théorème permet de tracer les tableau de variations des fonctions.

Remarque 32. La convention veut que les flèches de monotonie apparaissant dans les tableaux de variations représentent des monotonies *strictes*.

Remarque 33. La condition de *stricte* croissance énoncée dans le théorème 31 est une condition suffisante mais non nécessaire. Par exemple, la fonction $x \mapsto x^3$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ mais sa dérivée n'est pas strictement positive sur $\mathbb{R}$ car elle s'annule en zéro.

Nous essaierons de préciser cela et de donner une condition nécessaire et suffisante de stricte monotonie pour les fonctions dérivables plus tard dans l'année mais j'invite dès maintenant le lecteur à essayer de formuler par lui-même une telle condition.

3 Fonctions exponentielle et logarithme

3.1 Construction de l'exponentielle

Proposition-Définition 34. *On admetl'existence d'une unique fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$ telle que :*
$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = f(x)$ et $f(0) = 1$. Cette fonction est en fait unique et on l'appelle « fonction exponentielle ». On la note soit $x \mapsto e^x$, soit $x \mapsto \exp(x)$.

Remarque 35. Nous admettrons l'existence d'une telle fonction. En revanche, nous montrerons qu'elle est unique et nous montrerons les propriétés de cette fonction à l'aide de cette définition.

Proposition 36. *La fonction exponentielle a les propriétés suivantes :*

i) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(x) > 0$

ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}, \exp(x+y) = \exp(x) \times \exp(y)$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}, \exp(-x) = \frac{1}{\exp(x)}$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{Z}, (\exp x)^n = \exp(nx)$

v) *elle est croissante :* $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, x \leq y \implies \exp(x) \leq \exp(y)$

vi) $\lim\limits_{x \to -\infty} \exp(x) = 0$

vii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \exp(x) = +\infty$

3.2 Le logarithme népérien

Définition 37. On rappelle l'existence d'une unique fonction f définie sur $\mathbb{R}_+^*$ telle que :
$\forall x \in \mathbb{R},\ \exp(f(x))) = x$. On appelle cette fonction « fonction logarithme » et on la note $x \mapsto \ln(x)$.
On dit que la fonction logarithme est la fonction réciproque de l'exponentielle.

Lemme 38. *La fonction logarithme vérifie l'assertion suivante :* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln(\exp(x)) = x$.

Proposition 39. *La fonction logarithme a les propriétés suivantes :*

i) $\ln(1) = 0$

ii) $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ \ln(xy) = \ln(x) + \ln(y)$

iii) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln(x)$

iv) $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \forall n \in \mathbb{Z},\ \ln(x^n) = n\ln(x)$

v) *elle est croissante :* $\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2,\ x \leq y \implies \ln(x) \leq \ln(y)$

vi) $\lim\limits_{x \to 0} \ln(x) = -\infty$

vii) $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

viii) *elle est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et* $\forall x \in \mathbb{R}_+^*,\ \ln'(x) = \frac{1}{x}$

3.3 Calcul des puissances

Définition 40. Soit a un réel **strictement positif** et b un réel quelconque, alors on définit le nombre a^b comme :

$$a^b := \exp(b \ln a).$$

Remarque 41. On savait déjà définir a^b lorsque l'exposant b est entier. Il faut bien sûr montrer que ces deux définitions coïncident. En fait on connaît trois cas (non incompatibles) dans lesquels on peut définir a^b :

- Si b est un entier strictement positif et a un réel (ou complexe) quelconque,
- Si b est un entier négatif ou nul et que a est un réel (ou complexe) non nul,
- Si b est un réel quelconque et a est un réel strictement positif.

Notons enfin que l'on pose souvent par convention que $0^0 = 1$ bien que cela ne soit pas automatique et entraîne parfois des soucis de continuité de certaines fonctions.

Proposition 42 (Règle de calculs)**.** *Pour x, y deux réels* ***strictement positifs*** *et α, β deux réels, on peut écrire :*

i) $x^\alpha y^\alpha = (xy)^\alpha$.

ii) $x^\alpha x^\beta = x^{\alpha+\beta}$.

iii) $(x^\alpha)^\beta = x^{\alpha\beta}$.

iv) $\ln(x^\alpha) = \alpha \ln(x)$.

Remarque 43. Ces règles de calculs sont également valables pour des réels x et y négatifs avec des exposants α et β entiers. En revanche, on prendra garde de ne pas « mélanger les cas » de la remarque 41. Le lecteur méditera à cet effet la non-égalité suivante :

$$-1 \neq \left[(-1)^2\right]^{\frac{1}{2}}.$$

Proposition 44 (Résumé des résultats de croissances comparées)**.** *Les limites suivantes doivent être connues :*

i) $\lim\limits_{x \to +\infty} x e^{-x} = 0$

ii) $\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x) = 0$

3.4 Fonction puissance avec exposant fixé

Dans cette partie, on se fixe un réel a et on étudie la fonction $f : x \mapsto x^a$. L'objectif est d'analyser les propriétés de cette fonction selon la valeur du paramètre a. Toutes les propositions suivantes ne sont que des rappels des cours du lycée, qu'il faut connaître par cœur.

Proposition 45 (Ensemble de définition)**.** *La fonction $x \mapsto x^a$ est définie sur :*

— $\mathbb{R}$ *si a est un entier strictement positif.*
— $\mathbb{R}^*$ *si a est un entier strictement négatif.*
— $\mathbb{R}_+$ *si a est un réel strictement positif non entier.*
— $\mathbb{R}_+^*$ *si a est un réel strictement négatif non entier.*

Proposition 46 (Sens de variations et convexité)**.** *Il convient de séparer l'étude des variations sur $\mathbb{R}_+$ et sur $\mathbb{R}_-$.*

i) Sur $]0\,;\,+\infty[$, la fonction $x \mapsto x^a$ est :
— *croissante et convexe si $a \geqslant 1$,*
— *croissante et concave si $0 \leqslant a \leqslant 1$,*
— *décroissante et convexe si $a \leqslant 0$.*

ii) Sur $]-\infty\,;\,0[$, la fonction $x \mapsto x^a$ est :
— *décroissante et convexe si a est un entier positif pair,*
— *croissante et concave si a est un entier positif impair,*
— *croissante et convexe si a est un entier négatif pair,*
— *décroissante et concave si a est un entier négatif impair,*
— *non définie si a n'est pas un entier.*

Attention ! Si a est un entier négatif impair, la fonction $x \mapsto x^a$ n'est pas monotone sur $\mathbb{R}^*$. Pourtant, elle a même sens de variation sur $]-\infty\,;\,0[$ et sur $]0\,;\,+\infty[$.

Proposition 47 (Limites)**.** *Étudions les différentes limites possibles de $f : x \mapsto x^a$:*

i) En $x \to 0^+$:
— $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 0$ *si $a > 0$.*
— $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = 1$ *si $a = 0$.*

— $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ *si* $a < 0$.

ii) En $x \to +\infty$ *:*
- — $\lim_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$ *si* $a > 0$.
- — $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 1$ *si* $a = 0$.
- — $\lim_{x\to +\infty} f(x) = 0$ *si* $a < 0$.

iii) Si a *est entier, on peut également étudier la limite en* $x \to -\infty$ *:*
- — $\lim_{x\to 0-\infty} f(x) = +\infty$ *si* a *est un entier strictement positif pair.*
- — $\lim_{x\to -\infty} f(x) = -\infty$ *si* a *est un entier strictement positif impair.*
- — $\lim_{x\to -\infty} f(x) = 0$ *si* a *est un entier strictement négatif.*

iv) Si a *est entier, on peut également étudier la limite en* $x \to 0^-$ *:*
- — $\lim_{x\to 0^-} f(x) = f(0) = 0$ *si* a *est un entier strictement positif.*
- — $\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ *si* a *est un entier strictement négatif pair.*
- — $\lim_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$ *si* a *est un entier strictement négatif impair.*

Proposition 48 (Dérivation)**.** *La fonction* $x \mapsto x^a$ *est :*
- — *dérivable sur* $\mathbb{R}$ *si* a *est un entier positif.*
- — *dérivable sur* $\mathbb{R}^*$ *si* a *est un entier strictement négatif.*
- — *dérivable sur* $\mathbb{R}_+$ *si* $a > 1$ *et* a *n'est pas entier.*
- — *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* $a \in]0\,;1[$.
- — *dérivable sur* $\mathbb{R}_+^*$ *si* a *est un réel strictement négatif non entier.*

Dans tous les cas, la fonction dérivée est la fonction $x \mapsto ax^{a-1}$ *(avec pour convention que ceci désigne la fonction nulle si* $a = 0$*).*

Attention ! Pour le cas $a \in]0\,;1[$, la fonction $x \mapsto x^a$ est définie en $x = 0$ mais n'y est pas dérivable.

Proposition 49 (Primitive)**.** *La fonction* $x \mapsto x^a$ *admet des primitives sur son ensemble de définition :*
- — *Si* $a \neq 1$, *la fonction* $x \mapsto \frac{x^{a+1}}{a+1}$ *est une primitive sur l'ensemble de définition approprié.*
- — *Si* $a = 1$, *la fonction* $x \mapsto \begin{cases} \ln(x) & \text{si } x > 0 \\ \ln(-x) & \text{si } x < 0 \end{cases}$ *est un primitive sur* $\mathbb{R}^*$.

4 Intégration

4.1 Primitives

Définition 50 (Primitives)**.** Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction sur I. On dit qu'une fonction F est une primitive de f sur I si $\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$.

Théorème 51 (Existence de primitives (Admis pour le moment))**.** *Soit* I *un intervalle de* $\mathbb{R}$ *et* f *une fonction continue sur* I*. Alors* f *admet des primitives sur* I*. De plus, toutes ces primitives diffèrent par une constante. C'est-à-dire que si* F_1 *et* F_2 *sont deux primitives de* f *sur* I*, alors la fonction* $F_1 - F_2$ *est constante sur* I*.*

Théorème 52 (Théorème fondamental de l'analyse)**.** *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour tout* $a \in I$*, l'application*

$$F : x \in I \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

est l'unique primitive de f *sur* J *qui s'annule en* a*.*

Corollaire 53. *Soit* $f : I \to \mathbb{R}$ *une fonction continue. Pour tous* $(a, b) \in I^2$ *et toute primitive* F *de* f *sur* J*, on a*

$$\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = F(b) - F(a)$$

On notera souvent $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$.

Proposition 54 (Linéarité de l'intégrale). *Soit $I = [a\,;\,b]$ un segment de $\mathbb{R}$ et f et g deux fonctions sur I. Pour tous réels α et β, on peut écrire :*

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)(x)\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

Proposition 55 (Formule de Chasles). *Soit f une fonction continue sur $I = [a, b]$. Pour tout $c \in]a, b[$, on a l'égalité suivante*

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\mathrm{d}x$$

Lemme 56 (positivité de l'intégration). *Soit $I = [a\,;\,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ (**ce qui implique** $a \leqslant b$) et f une fonction continue et positive sur I. Alors $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \geqslant 0$.*

Corollaire 57 (croissance de l'intégration). *Soit $I = [a\,;\,b]$ un segment non vide de $\mathbb{R}$ (**ce qui implique** $a \leqslant b$) ainsi que f et g deux fonctions continues sur I.*

Si les fonctions f et g vérifient $\forall x \in I, f(x) \leqslant g(x)$; alors on a $\int_a^b f(t)\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\mathrm{d}t$.

4.2 Intégration par parties

Proposition 58 (intégration par parties). *Soient u et v deux fonctions dérivables sur un segment $I = [a\,;\,b]$ et à dérivées continues. Alors,*

$$\int_a^b u(t)v'(t)\mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\mathrm{d}t$$

4.3 Changement de variables

Théorème 59 (Changement de variable dans une intégrale). *Soit I et J deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit Φ une fonction dérivable sur I, de dérivé continue et à valeur dans J et f continue sur J. Alors, pour tous $(a, b) \in I^2$,*

$$\int_{\Phi(a)}^{\Phi(b)} f(u)\mathrm{d}u = \int_a^b \big(f \circ \Phi\big)(t)\ \Phi'(t)\mathrm{d}t.$$