Colles semaine 4

En bref

- Intégration. Nous admettons que **sur un intervalle** :
  - les fonctions continues admettent des primitives,
  - les primitives de la fonctions nulles sont exactement les constantes,
  - la fonction $x \mapsto \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$ est une primitive de f s'annulant en a.

  On démontre toutes les propriétés de l'intégration à partir de ceci. En particulier :
  - Relation de Chasles, propriété de positivité et croissance de l'intégrale.
  - Formule d'intégration par parties.
  - Formule de changement de variable.
- Exemples de calcul d'intégrale de fraction rationnelle.
- Équations cartésiennes et paramétriques de droite dans le plan.
- Équations cartésiennes et paramétriques de cercle dans le plan.
- Définition de cosinus, sinus et tangente. Formule d'addition, de symétrie, de rotation.
- Méthode de linéarisation, par exemple pour le calcul d'intégrale.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Calcul de $\int_0^1 \sqrt{1-u^2}\mathrm{d}u$ à l'aide du changement de variable $u = \sin(t)$. Interprétation géométrique ?
- Appliquer le changement de variable $u = \sqrt{t}$ dans l'intégrale $\int_0^{\pi^2} \sin(\sqrt{t})\mathrm{d}t$. *On pourra poursuivre en calculant la valeur de l'intégrale mais cela dépasse alors la simple question de cours.*
- Calculer $\int_0^1 \frac{1}{t^2-5t+6}$ ou $\int_0^1 \frac{t}{t^2-5t+6}$ ou $\int_0^1 \frac{t^2}{t^2-5t+6}$ ou tout autre exemple du même genre (on s'assurera que le dénominateur a des racines réelles).
- Donner une équation paramétrique d'une droite définie par une équation cartésienne ou le contraire.
- Identifier précisément la nature géométrique de l'ensemble d'équation cartésienne $x^2-6x+y^2+2y=0$ ou un exemple approchant
- Résoudre l'équation $\cos(2x) = 0$ d'inconnue x dans $\mathbb{R}$ ou un exemple approchant.
- Calculer $\int_0^\pi \cos(t)\cos(2t)$ en linéarisant.

Note aux colleurs

- Les étudiants ne connaissent pas la fonction arctangente donc ne savent pas primitiver $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
- Concernant les équations trigonométriques, on se limitera à des cas simples, le TD correspondant ne sera vu qu'en fin de semaine.

En détail

1 Intégration

Reprise du programme précédent avec en plus

Méthode 1. Soit P un polynôme de degré 2 avec racines réelles. Pour calculer $\int \frac{1}{P(t)}\mathrm{d}t$:
- Si P a une racine double, on calcule une primitive « à vue ».
- Si P a deux racines réelles α et β, on cherche deux constantes a et b vérifiant :

$$\forall t \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\},\ \frac{1}{P(t)} = \frac{a}{t-\alpha} + \frac{b}{t-\beta}. \tag{1}$$

- Si P n'a pas de racine réelle, on patientera jusqu'au cours de novembre.

On peut adapter la méthode et utiliser un peu de calcul pour calculer également $\int \frac{t}{P(t)}\mathrm{d}t$ ou $\int \frac{t^2}{P(t)}\mathrm{d}t$ voire $\int \frac{Q(t)}{P(t)}\mathrm{d}t$ pour n'importe quel polynôme Q.

2 Géométrie élémentaire

2.1 Équation de droite

Proposition 2 (Équations cartésienne de droites)**.** *Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un triplet de réels (a,b,c) de sorte que $(a,b) \neq (0,0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :*

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff ax + by + c = 0.$$

Remarque 3. Si (a,b,c) est un tel triplet (il n'est jamais unique), on dira que Δ est *la droite d'équation* $ax + by + c = 0$. En outre si jamais, le réel b est non nul, il est courant d'écrire l'équation de droite sous la forme équivalente suivante $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$. Dans ce cas, le coefficient directeur de la droite est alors égal à $-\frac{a}{b}$.

Proposition 4 (Équations paramétriques de droites)**.** *Soit Δ une droite du plan. Alors il existe un et un unique quadruplet de réels $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ de sorte que $(\alpha, \gamma) \neq (0,0)$ et que pour tout point M de coordonnées $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ on ait l'assertion suivante :*

$$M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \Delta \iff \left(\exists t \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x = \alpha t + \beta \\ y = \gamma t + \delta \end{cases}\right).$$

Remarque 5. Si $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ est un tel quadruplet (il n'est pas unique), alors le vecteur $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \alpha \\ \gamma \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite. Si de plus $\alpha \neq 0$, alors le coefficient directeur de la droite est égal à $\frac{\gamma}{\alpha}$.

Théorème 6. *Un étudiant de PTSI sait passer d'une présentation cartésienne de droite à une présentation paramétrique et vice-versa. De même, il sait trouver une équation cartésienne (ou paramétrique) d'une droite définie par :*
- *Deux points,*
- *Un point et un vecteur directeur,*
- *Un point et un vecteur normal,*
- *Un point et une droite parallèle,*
- *Un point et un coefficient directeur.*

2.2 Équation de cercle

Proposition 7 (présentation paramétrique des cercle)**.** *Soit $A(x_a, y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. Un présentation paramétrique de $\mathcal{C}$ est donnée par l'assertion suivante :*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) \in \mathcal{C} \iff \left(\exists t \in \mathbb{R} \begin{cases} x = x_a + r\cos(t) \\ y = y_a + r\sin(t) \end{cases} \right). \tag{2}$$

Proposition 8 (Équation cartésienne d'un cercle)**.** *Soit $A(x_a, y_a)$ un point du plan et r un réel positif, on note alors $\mathcal{C}$ le cercle de centre A et de rayon r. Une équation cartésienne du cercle est alors donnée par*

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ M(x,y) \in \mathcal{C} \iff (x - x_a)^2 + (y - y_a)^2 - r^2 = 0.$$

3 Formulaire de trigonométrie

Proposition 9 (Définitions ou presque)**.** *On doit savoir immédiatement que*

i) $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos^2(t) + \sin^2(t) = 1$.

ii) $\forall t \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(t + 2k\pi) = \cos(t)$ *et* $sin(t + 2k\pi) = \sin(t)$.

iii) $\forall t \in \mathbb{R},\ \cos(t) \neq 0 \implies \tan(t) = \frac{\sin(t)}{\cos(t)}$.

iv) $\forall t \in \mathbb{R},\ \forall k \in \mathbb{Z},\ \cos(t) \neq 0 \implies \tan(t + k\pi) = \tan(t)$.

Proposition 10 (Formules d'addition et duplication)**.** *Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.*

i) $\cos(x + y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y)$.

ii) $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = 2\cos^2(x) - 1 = 1 - 2\sin^2(x)$.

iii) $\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y)$.

iv) $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$.

Proposition 11 (Valeurs remarquables)**.** *Les valeurs suivantes doivent êtres connues par cœur :*

i) $\cos(0) = 1 \qquad \sin(0) = 0 \qquad \tan(0) = 0$.

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

iii) $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$.

iv) $\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \qquad \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$.

v) $\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1 \qquad \tan\left(\frac{\pi}{2}\right)$ *n'est pas défini.*

Proposition 12 (Inégalité fondamentale)**.** *Pour tout réel x, on a $|\sin(x)| \leqslant |x|$.*

Proposition 13 (Symétrie axiales)**.** *Soit t un réel :*

i) $\cos(-t) = \cos(t) \qquad \sin(-t) = -\sin(t)$ *(symétrie selon l'axe horizontal)*

ii) $\cos(\pi - t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi - t) = \sin(t)$ *(symétrie selon l'axe vertical)*

iii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \sin(t) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \cos(t)$ *(symétrie selon la première bissectrice)*

Proposition 14 (Rotations)**.** *Soit t un réel :*

i) $\cos(\pi + t) = -\cos(t) \qquad \sin(\pi + t) = -\sin(t)$ *(rotation d'un demi-tour)*

ii) $\cos\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = -\sin(t) \qquad \sin\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \cos(t)$ *(rotation d'un quart de tour)*

Proposition 15 (symétrie et rotation pour la tangente)**.** *Pour tout réel t, les égalités suivantes sont vraies* ***à condition que les termes aient un sens****.*

i) $\tan(-t) = -\tan(t)$

ii) $\tan(\pi - t) = -\tan(t)$

iii) $\tan\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = \frac{1}{\tan(t)}$

iv) $\tan(\pi + t) = \tan(t)$

v) $\tan\left(\frac{\pi}{2} + t\right) = \frac{-1}{\tan(t)}$

Proposition 16 (Addition pour la tangente). *Pour deux réels x et y, les égalités suivantes sont vraies **à condition que les termes aient un sens**.*

i) $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$

ii) $\tan(x-y) = \frac{\tan(x)-\tan(y)}{1+\tan(x)\tan(y)}$

4 Propriété des fonctions trigonométriques

Proposition 17 (Propriété du cosinus). *La fonction $x \mapsto \cos(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, paire, périodique de période 2π, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto -\sin(x)$.*

Proposition 18 (Propriété du sinus). *La fonction $x \mapsto \sin(x)$ est définie sur $\mathbb{R}$, impaire, périodique de période 2π, dérivable sur $\mathbb{R}$ et sa dérivée est $x \mapsto \cos(x)$.*

Proposition 19 (Propriété de la tangente). *La fonction $x \mapsto \tan(x)$ est définie sur tous les intervalles de type $\left]k\pi - \frac{\pi}{2}\,;\,k\pi + \frac{\pi}{2}\right[$ lorsque $k \in \mathbb{Z}$, impaire, périodique de période π, dérivable sur son ensemble de définition et sa dérivée est $x \mapsto \frac{1}{\cos^2(x)} = 1 + \tan^2(x)$.*

5 Autre méthodes de calcul

5.1 Équations trigonométriques

Proposition 20 (Équations trigonométriques). *Soit $(x,a) \in \mathbb{R}^2$. On a,*

$$\begin{cases} \cos(x) = \cos(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = -a + 2k\pi) \\ \sin(x) = \sin(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + 2k\pi \quad \text{ou} \quad \exists k \in \mathbb{Z},\ x = \pi - a + 2k\pi) \\ \tan(x) = \tan(a) \iff (\exists k \in \mathbb{Z},\ x = a + k\pi) \qquad \textit{si les termes ont un sens} \end{cases}$$

5.2 Linéarisation et factorisation

La linéarisation permet de transformer un produit de cosinus ou sinus en somme de cosinus ou sinus. C'est très utile pour calculer des intégrales par exemples.

L'opération réciproque (la factorisation donc) peut servir dans certaines équations, exemple de la résolution de $\cos(x) + \cos(2x) = \sin(3x)$.