# Colles semaine 5

## En bref

- Équations cartésiennes et paramétriques de cercle dans le plan.
- Définition de cosinus, sinus et tangente. Formule d'addition, de symétrie, de rotation.
- Méthode de linéarisation, par exemple pour le calcul d'intégrale.
- Expression à l'aide de la tangente de l'angle moitié.
- Calcul de somme, notation $\sum$.
- Extension aux produits, factorielles et coefficients du binôme.
- Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Formule du binôme de Newton.

## Exemples non exhaustifs de questions de cours

*Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.*

- Calculer $\int\limits_0^\pi \cos(t)\cos(2t)$ en linéarisant.
- Donner une expression de $\sin(x)$ et $\cos(x)$ en fonction de $t = \tan(x/2)$ en précisant le domaine de validité.
- Rappeler et démontrer la formule de $\sum\limits_{k=1}^{n} k$ ou $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2$.
- Rappeler et démontrer la formule de $\sum\limits_{k=1}^{n} q^k$.
- Citer la formule de somme télescopique. L'appliquer pour retrouver la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Citer la formule du binôme et l'appliquer pour le calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.

## Note aux colleurs

- On a cette semaine toute liberté pour donner les équations trigonométriques de son choix, y compris les plus retorses.
- Pas de sommes doubles cette semaine.
- Toujours pas de calculs avec complexes cette semaine. C'est pour bientôt.

# En détail

## 1 Géométrie et trigonométrie

Reprise du programme précédent.

## 2 Calculs de sommes

### 2.1 Exemples à connaître

**Proposition 1** (Sommes arithmétiques et géométriques)**.** *Pour tout entier naturel $n$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \ ; \ .$$

*Plus généralement si $a$ est une suite arithmétique et $n$ et $m$ deux entiers naturels vérifiant $n \leqslant m$, alors :*

$$\sum_{k=n}^{m} a_k = \frac{(m-n+1)(a_n+a_m)}{2} \ ; \ .$$

*Pour tout nombre réel $q$,*

$$\sum_{k=0}^{n} q^k = \begin{cases} n+1 & \text{si } q = 1 \\ \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q} & \text{si } q \neq 1 \end{cases}$$

**Proposition 2.** *Pour tout entier naturel $n$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \ ; \ .$$

### 2.2 Règles de calcul

**Proposition 3** (Factorisation et développement)**.** *Soit $(a_k)$ et $(b_k)$ deux suites de réels et $m$ et $n$ des entiers naturels vérifiant $m \leqslant n$. Alors :*

*i)* $\sum\limits_{k=m}^{n} (a_k + b_k) = \sum\limits_{k=m}^{n} a_k + \sum\limits_{k=m}^{n} b_k$.

*ii) Soient $\lambda$ un nombre réel, $l \in \mathbb{N}$, alors,*

$$\sum_{k=m}^{n} (\lambda a_k) = \lambda \sum_{k=m}^{n} a_k.$$

$$\sum_{k=m}^{n} (a_k + \lambda) = \left( \sum_{k=m}^{n} a_k \right) + (n-m+1)\lambda.$$

**Proposition 4** (Règle de Chasles pour les sommes)**.** *Soient $p$, $q$ et $r$ trois entiers naturels tels que $p < r < q$ et $a$ une suite de réels, alors :*

$$\sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r} a_k + \sum_{k=r+1}^{q} a_k = \sum_{k=p}^{r-1} a_k + \sum_{k=r}^{q} a_k.$$

**Exemple 5.** Calculer $\sum\limits_{k=0}^{2n} \min(k,n)$ pour tout entier naturel $n$.

**Exercice 6.** Soit $n \in \mathbb{N}$

1. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k(k+1)$.
2. Calculer

$$\sum_{\substack{k=1\\k\text{pair}}}^{2n} k\ ,\quad \sum_{\substack{k=1\\k\text{impair}}}^{2n+1}\ ,\ k\ ,\quad \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k k.$$

### 2.3 Changement d'indices

**Méthode 7** (Décalage d'indice)**.** Soient $p, q$ et $r$ des entiers avec $p \leqslant q$. On dit que l'on fait un décalage d'indice dans la somme $S = \sum_{k=p}^{q} a_k$, si l'on considère un nouvel indice $j = k + r$.

1. On a donc définit le nouvel indice $j$ par $j = k + r$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = j - r$
3. Ainsi dans la somme, le terme générique $a_k$ devient $a_{j-r}$. Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = p + r$ et $j = q + r$.

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=p+r}^{q+r} a_{j-r}$.

**Méthode 8** (Symétrisation)**.** Soient $p, q$ et $r$ des entiers avec $p \leqslant q$ et $S = \sum_{k=p}^{q} a_k$. On dit que l'on fait une symétrisation d'indice lorsque :

1. On définit un nouvel indice $j$ par $j = q - k$.
2. On peut écrire la relation réciproque $k = q - j$
3. Ainsi dans la somme, le terme générique $a_k$ devient $a_{q-j}$. Et les bornes $k = p$ et $k = q$ deviennent respectivement $j = q - p$ et $j = 0$ (Notons que la borne supérieure devient la borne inférieure et vice versa).

On peut donc écrire : $S = \sum_{k=p}^{q} a_k = \sum_{j=0}^{q-p} a_{q-j}$.

### 2.4 Une application, les sommes télescopiques

**Lemme 9.** *Soit $a$ une suite de complexes et $p$ et $q$ deux entiers naturels vérifiant $p < q$ ; alors :*

$$\sum_{k=p}^{q}(a_{k+1} - a_k) = a_{q+1} - a_p.$$

**Application 10** (Une nouvelle identité remarquable)**.** Soit $a$ et $b$ deux réels et $n$ un entier naturel. Alors :

$$a^{n+1} - b^{n+1} = (a - b)\left(\sum_{k=0}^{n} a^{n-k} b^k\right).$$

Si, de plus $n$ est un entier pair (et donc $n + 1$ est impair), alors :

$$a^{n+1} + b^{n+1} = (a + b)\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k a^{n-k} b^k\right).$$

## 3 Extension aux produits

### 3.1 Règles de calcul

**Proposition 11** (Règles de calcul pour les produits)**.** *Soit $(a_k)$ et $(b_k)$ deux suites de réels et $m$ et $n$ des entiers naturels vérifiant $m \leqslant n$. Alors :*

*i)* $\prod_{k=m}^{n}(a_k b_k) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)\left(\prod_{k=m}^{n} b_k\right)$.

*ii) Soient $\lambda$ un nombre réel, alors,*

$$\prod_{k=m}^{n}(\lambda a_k) = \lambda^{n-m+1}\left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right).$$

$$\prod_{k=m}^{n}(a_k^{\lambda}) = \left(\prod_{k=m}^{n} a_k\right)^{\lambda}.$$

**Exercice 12.** Écrire la règle de Chasles pour les produits

**Proposition 13** (Changement d'indice)**.** *Les règles de changement d'indices pour les produits sont exactement les mêmes que pour les sommes.*

**Proposition 14** (Produits télescopique)**.** *Soit $a$ une suite de réels et $p$ et $q$ deux entiers naturels vérifiant $p < q$ ; alors :*

$$\prod_{k=p}^{q}\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{a_{q+1}}{a_p}.$$

## 3.2 Factorielle et coefficients binomiaux

### 3.2.1 Définitions

**Définition 15.** Pour tout entier naturel non nul $n$, on pose $n! := \prod_{k=1}^{n} k$. Le nombre $n!$ est appelé factorielle de $n$

**Définition 16.** Soient $n$ et $p$ deux entiers naturels, on appelle **coefficient binomial « $p$ parmi $n$ »**, et l'on note $\binom{n}{p}$, le nombre suivant :

$$\binom{n}{p} = \begin{cases} \dfrac{n!}{p!(n-p)!} & \text{si } p \leqslant n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

### 3.2.2 Propriétés élémentaires

**Proposition 17** (Relation de récurrence sur les factorielles)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$, alors $(n+1)! = n+1)n!$ et $\frac{(n+1)!}{n+1} = n!$.*

**Proposition 18** (Premières propriétés)**.** *Les coefficients binomiaux satisfont les propriétés suivantes*

*i) Si $p \leqslant n$, $\binom{n}{p} = \frac{(n-p+1)\times(n-p+2)\times\cdots\times n}{p!} = \frac{1}{p!}\prod_{k=0}^{p-1}(n-k)$.*

*ii) $\forall n \in \mathbb{N}$, $\binom{n}{0} = 1$; $\binom{n}{n} = 1$; $\binom{n}{1} = n$; $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$.*

**Proposition 19** (Symétries des coefficients binomiaux)**.** *Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$, alors :*

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}$$

**Proposition 20** (Formule de Pascal)**.** *Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. On suppose de plus que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$,*

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p} + \binom{n-1}{p-1}.$$

**Proposition 21** (Formule du capitaine)**.** *Soit $p$ et $n$ deux entiers naturels vérifiant $p \leqslant n$. On suppose de plus que $n \geqslant 1$ et $p \geqslant 1$,*

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

### 3.2.3 Formule du binôme

**Proposition 22** (Formule du binôme de Newton)**.**

$$\forall (a,b) \in \mathbb{C}^2,\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ (a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

*Remarque* 23. En appliquant cette formule avec $b = 1$, il vient :

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \forall n \in \mathbb{N},\ \ \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k = (1+a)^n.$$