Colles semaine 6

En bref

- Calcul de somme, notation $\sum$.
- Extension aux produits, factorielles et coefficients du binôme.
- Factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Formule du binôme de Newton.
- Cas des sommes à doubles indices.
- Rappel sur les raisonnements classiques : par l'absurde, par récurrence, par double implication,analyse-synthèse ...
- Nombre complexes : écriture algébrique et trigonométrique/exponentielle. Conjugaison
- Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel θ et formules correspondantes (Euler, De Moivre).
- Module et argument d'un complexe. Inégalité triangulaire.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer la formule de somme télescopique. L'appliquer pour retrouver la factorisation de $a^{n+1} - b^{n+1}$.
- Citer la formule du binôme et l'appliquer pour le calcul de $\sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$.
- Montrer l'existence d'un unique couple de fonction (p, i) où p est paire, i est impaire et $p + i = \exp$.
- Montrer par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R},\ |\sin(nx)| \leqslant n|\sin x|$.
- Citer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les complexes. *On pourra demander de préciser les cas d'égalités.*
- Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\mathrm{d}t$. *On imposera une linéarisation avec le formalisme complexe.*
- Pour un réel θ déterminer le module et un argument de $1 \pm \mathrm{e}^{i\theta}$. *Pour les étudiants habiles, on adaptera avec* $\mathrm{i} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.

Note aux colleurs

- La résolution générique d'équations complexes de degré 2 n'a pas été vue.
- Pour les calculs de sommes (et encore plus de sommes doubles) un étudiant qui se sent bloqué DOIT avoir le réflexe d'écrire explicitement certains termes, de les organiser si besoin dans un tableau, de manipuler une notation informelle avec points de suspension. Bref, il doit proposer des stratégies de résolution. Une absence de telle initiative sera durement sanctionnée.
- Une nouvelle règle instaurée en PTSI2 stipule que tout oubli de parenthèse dégrade la note d'un point !

En détail

1 Sommes

Reprise du programme avec en plus les sommes doubles :

2 Méthodes de raisonnement

Théorème 1. *Un bon étudiant de PTSI maîtrise les techniques de raisonnements suivant :*

— *Raisonnement par l'absurde,*
— *Raisonnement par contraposition,*
— *Raisonnement par récurrence,*
— *Raisonnement par analyse-synthèse.*

Un étudiant qui hésiterait sur l'un de ces raisonnement appliquera le deuxième point de ce théorème...
...et en tirera les conséquences logiques qui s'imposent !

3 Nombres complexes

3.1 Construction du corps des complexes

On définit une addition et une multiplication sur $\mathbb{R}^2$ de la manière suivante :

Définition 2. On définit sur $\mathbb{R}^2$ les lois $\oplus$ et $\otimes$ suivantes :

— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \oplus (c,d) = (a+c, b+d)$.
— $\forall (a,b) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (c,d) \in \mathbb{R}^2,\ \ (a,b) \otimes (c,d) = (ac-bd, ad+bc)$.

Notation 3. Nous réalisons les identifications suivantes :

1. On identifie tout réel a avec le couple $(a,0)$.
2. $(0,1) \otimes (0,1) = (-1,0)$. On identifie donc i avec le couple $(0,1)$.
3. Tout couple (a,b) de réels sera noté $a+ib$.

3.2 Propriétés algébriques

Définition 4. Pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe un unique couple $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $z = a+ib$. Les réels a et b sont respectivement appelés **partie réelle** et **partie imaginaire** du nombre complexe z. On les note alors :

$$a = \mathrm{Re}(z) \quad \text{et} \quad b = \mathrm{Im}(z).$$

Tout nombre complexe z s'écrit donc de manière unique sous la forme $z = \mathrm{Re}(z) + i\mathrm{Im}(z)$ qui s'appelle la **forme algébrique** de z.

Les nombres complexes dont la partie réelle est nulle sont appelés **imaginaires purs**. L'ensemble des imaginaires purs est noté $i\mathbb{R}$ car c'est l'ensemble $\{ib \ ;\ b \in \mathbb{R}\}$.

Remarque 5. Un nombre complexe est réel si et seulement si sa partie imaginaire est nulle.

Attention ! Écrire $z = a+ib$ ne suffit pas pour conclure que $a = \mathrm{Re}(z)$ et $b = \mathrm{Im}(z)$. Il faut également que a et b soit réels.

Proposition 6 (linéarité des parties réelles et imaginaires)**.**

$$\forall (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2,\ \forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \mathrm{Re}(z) + \mu \mathrm{Re}(z') \ \ ; \ \ \mathrm{Im}(\lambda z + \mu z') = \lambda \mathrm{Im}(z) + \mu \mathrm{Im}(z')$$

$$\forall (z,z') \in \mathbb{C}^2,\ \ \mathrm{Re}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Re}(z') - \mathrm{Im}(z)\mathrm{Im}(z') \ \ ; \ \ \mathrm{Im}(zz') = \mathrm{Re}(z)\mathrm{Im}(z') + \mathrm{Im}(z)\mathrm{Re}(z')$$

Proposition 7 (inversibilité)**.** *Tout nombre complexe $z \neq 0$ admet un inverse noté $\frac{1}{z}$ ou z^{-1}. C'est-à-dire un nombre tel que $zz^{-1} = 1$. Par ailleurs, cet inverse est unique.*

3.2.1 Conjugaison

Définition 8. Soit z un nombre complexe. On appelle **conjugué** de z et on note $\bar{z}$ le nombre défini par :

$$\bar{z} = \mathrm{Re}(z) - i\mathrm{Im}(z).$$

Proposition 9 (Propriétés de base). *Pour tous nombres complexes z et z',*

1. $\forall(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2,\ \overline{\lambda z+\mu z'} = \lambda\bar{z}+\mu\bar{z'}$ *(on dit que la conjugaison est $\mathbb{R}$-linéaire) ;*
2. $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z'}$;
3. *si de plus,* $z \neq 0$, $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\bar{z}}$;
4. *si* $z' \neq 0$, $\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z'}}$;
5. $\bar{\bar{z}} = z$ *(on dit que la conjugaison est une involution).*
6. $$\forall z\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re}(z) = \frac{z+\bar{z}}{2}\quad ;\quad \mathrm{Im}(z) = \frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

Proposition 10 (Caractérisation des réelles et imaginaires purs). *On peut caractériser les réels et les imaginaires purs.*

- *Un nombre complexe z est réel si et seulement si $z = \bar{z}$.*
- *Un nombre complexe z est imaginaire pur si et seulement si $z = -\bar{z}$.*

3.2.2 Module

Définition 11. Pour tout $z\in\mathbb{C}$, on appelle **module** de z le réel positif, noté $|z|$, défini par :

$$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{(\mathrm{Re}z)^2+(\mathrm{Im}z)^2}.$$

Remarque 12. Si $z\in\mathbb{R}$, alors le module de z n'est autre que la valeur absolue de z.

Proposition 13 (Propriétés de base). *Pour tout nombre complexe z, on a :*

1. $|\bar{z}| = |z|$;
2. $z = 0 \iff |z| = 0$;
3. $|\mathrm{Re}(z)| \leqslant |z|$ et $|\mathrm{Im}(z)| \leqslant |z|$;
4. *si de plus* $z\neq 0$,
$$\frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$
5. *Pour tous complexes z_1 et z_2,*
$$|z_1z_2| = |z_1||z_2| \text{ et si } z_2\neq 0,\ \left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}$$

Proposition 14 (Inégalité triangulaire). *Pour tous complexes z_1 et z_2, on a :*

1. $$|z_1+z_2| \leqslant |z_1|+|z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1 = kz_2$ ou $z_2 = kz_1$
2. $$||z_1|-|z_2|| \leqslant |z_1-z_2|$$
avec égalité si et seulement si $\exists k\in\mathbb{R}^+,\ z_1 = kz_2$ ou $z_2 = kz_1$

4 Notation trigonométrique et exponentielle complexe

On se fixe un repère orthonormé direct $\mathcal{R} = (O,\vec{u},\vec{v})$ du plan et on considère les points I et J tels que $\overrightarrow{OI} = \vec{u}$ et $\overrightarrow{OJ} = \vec{v}$. On notera $\mathbb{U}$ l'ensemble des nombres complexes de module 1 et $\mathcal{C}$ le cercle trigonométrique.

4.1 Notation exponentielle

Notation 15 (Notation d'Euler)**.** Soit $\theta \in \mathbb{R}$, on note $e^{i\theta}$ le complexe $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$.

Proposition 16 (Caractérisation du cercle unité)**.** *On a, avec cette notation,* $\mathbb{U} = \{e^{i\theta};\ \theta \in \mathbb{R}\}$*, c'est-à-dire :*

i) $|e^{i\theta}| = 1$ *et donc* $e^{i\theta} \in \mathbb{U}$ *;*

ii) réciproquement, pour tout $z \in \mathbb{U}$*, il existe* $\theta \in \mathbb{R}$ *tel que* $z = e^{i\theta}$*.*

Proposition 17 (Règles de calculs pour l'exponentielle)**.** *Cette notation est cohérente avec les règles de calculs classiques de l'exponentielle, à savoir :*

i) $e^{i\theta} = e^{i\theta'}$ *si et seulement si* $\theta \equiv \theta'[2\pi]$.

ii) $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$.

iii) $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta} = \frac{1}{e^{i\theta}}$.

iv) $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$.

Proposition 18 (Formules d'Euler)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$ *on a :*

$$\cos(\theta) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} = \mathrm{Re}(e^{i\theta}) \quad \text{et} \quad \sin(\theta) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} = \mathrm{Im}(e^{i\theta}).$$

Méthode 19. En écrivant pour un réel θ et un entier n , $\cos^n(\theta) = \left(\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}\right)^n$ et en développant avec la formule du binôme, on retrouve la linéarisation de $\cos^n(\theta)$.

Application 20 (Factorisation par angle moitié)**.** Pour tout réel θ, $1 + e^{i\theta} = e^{i\frac{\theta}{2}} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$.

Proposition 21 (Formule de De Moivre)**.** *Pour tout* $\theta \in \mathbb{R}$*, on a :*

$$(\cos(\theta) + i\sin(\theta))^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta).$$

Méthode 22. Cette formule permet de retrouver (après extraction des parties réelle et imaginaire) les délinéarisation de $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$.

4.2 Modules et argument

Proposition-Définition 23. *Pour tout complexe* **non nul** $z \in \mathbb{C}^*$*, il existe* $r \in \mathbb{R}_+$ *et* $\theta \in \mathbb{R}$ *tels que* $z = re^{i\theta}$*. Le réel positif* r *de l'égalité est unique et vaut le module de* z*,* $r = |z|$*. Par ailleurs, il existe une infinité de valeur de* θ *correspondante, toutes congrues modulo* 2π*. Une telle valeur de* θ *est appelé un argument de* z*. L'unique telle valeur de* θ *de l'intervalle* $]-\pi\,;\,\pi]$ *est parfois appelée argument principal de* z *et se note* $\mathrm{Arg}(z)$*. Par ailleurs l'écriture* $z = re^{i\theta}$ *s'appelle forme trigonométrique de* z*.*

Corollaire 24. *Soient* z_1 *et* z_2 *deux nombres complexes non nuls. Alors,*

$$z_1 = z_2 \iff \begin{cases} |z_1| = |z_2| \\ \arg(z_1) \equiv \arg(z_2)\ [2\pi] \end{cases}$$

Méthode 25. Comment passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique ?
Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ et $z = a + ib$. On calcule $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, puis on cherche un argument θ de z tel que :

$$\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$$

On ne connaît pas toujours une solution simple de ce système !