Colles semaine 7

En bref

- Nombre complexes : écriture algébrique et trigonométrique/exponentielle. Conjugaison
- Définition de $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ pour un réel θ et formules correspondantes (Euler, de Moivre).
- Module et argument d'un complexe. Inégalité triangulaire.
- Traduction de problèmes géométriques, notamment :
  - Le module de l'affixe d'un vecteur correspond à une distance. L'argument d'un quotient d'affixes de vecteur correspond à un angle
  - Traduction complexe de l'alignement des points.
  - Équations complexes de droites, de médiatrices, de cercles.
  - Exemples d'écriture complexe de transformations du plan.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer et démontrer l'inégalité triangulaire pour les complexes. *On pourra demander de préciser les cas d'égalités.*
- Calculer $\int_0^{\pi/2} \cos^3 t\mathrm{d}t$. *On imposera une linéarisation avec le formalisme complexe.*
- Pour un réel θ déterminer le module et un argument de $1 \pm \mathrm{e}^{i\theta}$. *Pour les étudiants habiles, on adaptera avec* $\mathrm{i} \pm \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$.
- Résoudre l'équation $\frac{z-2\mathrm{i}}{z} \in \mathbb{R}$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}^*$ par le calcul et par interprétation géométrique. *Variantes possibles avec* $\frac{z-2\mathrm{i}}{z} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$ *et* $\frac{z-2\mathrm{i}}{z} \in \mathbb{U}$.
- Interpréter géométriquement la fonction $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}} z + 1 + \mathrm{i}$ en terme de transformation du plan.

Note aux colleurs

- La résolution générique d'équations complexes de degré 2 n'a pas été vue.
- Une nouvelle règle instaurée en PTSI2 stipule que tout oubli de parenthèse dégrade la note d'un point !

Note aux étudiants

L'interro de cette semaine étant décalée, les problèmes de sommation figurent au programme de l'interro de la semaine prochaine sans figurer au programme de colle.

En détail

1 Nombres complexes

Reprise du programme précédente avec en plus :

1.1 Affixe des points et vecteurs

Dans toute la suite du document, nous considérons un plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Définition 1 (Affixes)**.** Soit A un point de coordonnées (x_A, y_A). On appelle *affixe du point A*, le nombre complexe suivant $z_A = x_A + \mathrm{i}y_A$.

De même, si $\vec{u}$ est un vecteur de coordonnées (x_u, y_u), alors l'affixe du vecteur $\vec{u}$ est $z_u := x_u + \mathrm{i}y_u$.

Lemme 2 (La norme d'un vecteur est donnée par le module de son affixe)**.** *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z, alors la norme de $\vec{u}$ vaut $\|u\| = |z| = \sqrt{z\bar{z}}$.*

De même, si A et B sont deux points d'affixe respectives z_A et z_B, alors la distance entre A et B vaut $AB = |z_B - z_A|$.

Lemme 3 (Caractérisation du cercle trigonométrique)**.** *L'ensemble des affixes des points du cercle trigonométrique est exactement l'ensemble $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\right\}$ qui est égal à $\left\{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} \mid \theta \in [0\,;\,2\pi[\right\}$.*

1.2 Rappels sur les transformations du plan

Définition 4. Une transformation du plan est une application définie sur un plan, à valeurs dans ce même plan. Autrement dit, il s'agit d'une fonction qui, à tout point du plan, associe un autre (éventuellement identique) point du plan.

Exemple 5 (translation)**.** Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan. On appelle *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$ la transformation du plan qui à tout point M associe le point $M' = M + \overrightarrow{u}$. C'est-à-dire que M' est l'unique point vérifiant $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Exemple 6 (rotation)**.** Soit θ un réel et O un point du plan. On appelle *rotation de centre O et d'angle θ* la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' situé sur le cercle de centre O et de rayon OM et de sorte que l'angle orienté $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OM'}) = \theta$.

Exemple 7 (homothétie)**.** Soit λ un réel et O un point du plan. On appelle *homothétie de centre O et de rapport λ* la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' vérifiant $\overrightarrow{OM'} = \lambda\overrightarrow{OM}$.

Remarque 8. Si $\lambda = 0$, alors l'homothétie de rapport nul envoie tous les points sur O.

Exemple 9 (symétrie orthogonale)**.** Soit Δ une droite du plan. On appelle *symétrie orthogonale d'axe* Δ la transformation du plan qui à tout point M associe le point M' de sorte que Δ soit la médiatrice du segment $[MM']$.

Comment traduire mathématiquement l'action de telles transformations sur les affixes des points ?

1.2.1 Les cas à connaître par cœur

Proposition 10 (Écriture complexe des translations)**.** *Soit $\vec{u}$ un vecteur d'affixe z_u et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par la translation de vecteur $\vec{u}$ est le point M' d'affixe $z + z_u$.*

Proposition 11 (Écriture complexe des rotations de centre O)**.** *Soit θ un réel et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par la rotation de centre O et d'angle θ est le point M' d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z$.*

Proposition 12 (Écriture complexe des homothéties de centre O)**.** *Soit λ un réel positif et M un point du plan d'affixe z. Alors l'image de M par l'homothétie de centre O et de rapport λ est le point M' d'affixe λz.*

Proposition 13 (Transformation associé à la conjugaison)**.** *Soit M un point d'affixe z. Alors l'image de M par la symétrie orthogonal d'axe la droite des réels est le point M' d'affixe $\bar{z}$.*

1.2.2 Et les cas décentrés ?

Si l'on a affaire à une rotation ou une homothétie dont le centre n'est pas l'origine du repère son écriture complexe n'est pas aussi simple. Le mieux est alors de la retrouver à la main en se rappelant que le centre de la transformation est par définition invariant.

Méthode 14. Soit A un point d'affixe z_A et θ un réel ainsi que λ un réel positif. Soit également M un point quelconque d'affixe z. Alors :

— L'affixe z_r de l'image de M par la rotation de centre A et d'angle θ vérifie $(z_r - z_A) = e^{i\theta}(z - z_A)$.

— L'affixe z_h de l'image de M par l'homothétie de centre A et de rapport λ vérifie $(z_r - z_A) = \lambda(z - z_A)$.

Méthode 15. Soit (a, b) deux complexes fixés (avec $a \neq 0$) et f la transformation du plan qui a tout point d'affixe z associe le point d'affixe $z' = az + b$.

Pour interpréter géométriquement cette transformation :

1) Si $a = 1$, il s'agit d'une translation et c'est trivial.
2) Sinon, on résout l'équation $z = az + b$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$. Elle admet une unique solution qu'on note z_C et on note C le point du plan correspondant.
3) On prouve alors que $\forall z \in \mathbb{C},\ f(z) - z_C = a(z - z_C)$.
4) On en déduit par des arguments élémentaires que f est la composée de la rotation de centre C et d'angle $\arg(a)$ avec l'homothétie de centre C et de rapport $|a|$.

1.3 Quelques exemples d'équations complexes à résolution géométriques

1.3.1 Alignement des points

Commençons par un rappel basique :

Proposition 16. *Trois points A, B et C (distincts) sont aligné si et seulement si les vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont colinéaires. Autrement dit, si et seulement si il existe un réel k tel que $\vec{AB} = k\vec{AC}$.*

Cela conduit naturellement à la proposition suivante.

Proposition 17. *Soit $\vec{u}$ et $\vec{u'}$ deux vecteurs d'affixes respectives z et z'. Ces deux vecteurs sont colinéaires si et seulement si*

$$(\exists k \in R, z = kz') \text{ ou } (\exists k \in R, z' = k) \tag{1}$$

Remarque 18. Si les deux complexes z et z' sont chacun non nuls alors les deux parties de la propriété précédentes sont équivalentes.

Corollaire 19 (Équation complexe de droite)**.** *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient à la droite (AB) si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in \mathbb{R}$.*

Remarque 20. De plus M appartient au segment $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z_B-z_A} \in [0\,;\,1]$.

1.3.2 Médiatrice

On rappelle que la médiatrice d'un segment $[AB]$ désigne le lieu des points qui sont équidistants à A et B.

Proposition 21 (Équation complexe de droite)**.** *Soit A et B deux points distincts d'affixes respectives z_A et z_B ainsi que M un point quelconque (distinct de B) d'affixe z. Alors M appartient à la médiatrice de $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\left|\frac{z-z_A}{z-z_B}\right| = 1$.*

1.3.3 Équations de cercle

Comme on sait calculer la distance entre deux points à l'aide du module, on peut facilement déterminer des équations de cercles.

Proposition 22 (Équation complexe de cercle dont on connaît le centre et le rayon)**.** *Soit A un point distinct d'affixe z_A et r un réel positif ainsi que M un point quelconque d'affixe z. Alors M appartient au cercle de centre A et de rayon r si et seulement si son affixe vérifie $(z - z_A)(\bar{z} - \bar{z_A}) = r^2$.*

Proposition 23 (Équation complexe de cercle dont on connaît le diamètre)**.** *Soit A un point distinct d'affixe z_A, B un point d'affixe z_B et r ainsi que M un point quelconque (distinct de B d'affixe z. Alors M appartient au cercle de diamètre $[AB]$ si et seulement si son affixe vérifie $\frac{z-z_A}{z-z_B} \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.*