Colles semaine 8

En bref

- Système linéaires : définition et vocabulaire.
- Cas pratiques de résolution. Triangularisation (voire échelonnement si nécessaire) des systèmes carrés. Et résolution « facile » des systèmes triangulaires ou échelonnée.
- Lien entre les solutions d'un système linéaire et celles de son système homogène associé.
- Matrices : formules de sommes et de produit.
- Transposées des matrices.
- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- Équivalence logique entre l'inversibilité des matrices carré et le caractère de Cramer des systèmes linéaires associés.
- Algorithme pratique pour déterminer l'inversibilité et l'éventuel inverse d'une matrice carrée.
- Critère du déterminant pour l'inversibilité d'une matrice (ou le caractère de Cramer d'un système 2×2.

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Citer la formule de produit matriciel. L'appliquer pour montrer la formule $({}^{\mathrm{T}}AB) = B^{\mathrm{T}}A^{\mathrm{T}}$; ou bien (choix du colleur) pour montrer que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est triangulaire supérieure.
- Montrer que la j-ème colonne du produit matriciel AB est exactement le produit de A par la j-ème colonne de B. (Ou son analogue avec le produit par lignes).
- Montrer le théorème de structure sur l'ensemble des solutions d'un système linéaire (*aka :* solution particulière + ensembles des solutions homogènes).
- Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ou une variante par opérations élémentaires (directement sur la matrice ou bien par introduction du système sous-jacent).

Note aux colleurs

- La propriété qui affirme que l'unicité de la solution d'un système carré entraîne son existence est connue des élèves sous le nom de « miracle des systèmes carrées ».
- De même, on appelle « miracle de l'inversibilité carrée » le fait que l'inversibilité à gauche d'une matrice carrée entraîne son inversibilité à droite et vice-versa. Les étudiants ont compris qu'il s'agit d'un seul et même miracle.
- Afin d'exprimer simplement les formules de produit matriciel, nous adoptons provisoirement la notation $A[i,j]$ pour désigner le coefficients de la matrice A en i-ème ligne et j-ème colonne. Ceci ayant pour avantage non négligeable de bien préciser que ce coefficient est une fonction de la matrice A.

En détail

1 Notations générales et vocabulaire

Définition 1. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On appelle **système linéaire de n équations à p inconnues** $x_1, x_2, \cdots, x_p$ tout système $(\mathcal{L})$ d'équations du type :

$$(\mathcal{L}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n \\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{K}$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ un n-uplet de scalaires appartenant à $\mathbb{K}$.

— Les $a_{i,j}$ sont appelés les **coefficients** du système.
— $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ est appelé le **second membre** du système.
— On dit que le système est **homogène** ou qu'il est **sans second membre** lorsque $b_1 = b_2 = \cdots = b_n = 0$.
— On appelle **solution du système** toute p-liste $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ d'éléments de $\mathbb{K}^p$ vérifiant les n équations de $(\mathcal{S})$.
— Le système $(\mathcal{L})$ est dit **compatible** s'il admet au moins une solution, sinon on dit qu'il est **incompatible**.
— On appelle **système homogène associé à** $(\mathcal{L})$, et on notera $(\mathcal{L}_0)$, le système obtenu en remplaçant tous les b_i par 0.
— On dit qu'un **système** est **carré** s'il a autant d'équations que d'inconnues.
— Un système carré est dit **triangulaire supérieur**, si :
$\forall (i,j) \in (\llbracket 1\,;\,n\rrbracket)^2,\ (i > j) \implies a_{i,j} = 0$
Il est dit triangulaire inférieur si : $\forall (i,j) \in (\llbracket 1\,;\,n\rrbracket)^2,\ (i < j) \implies a_{i,j} = 0$

Afin de simplifier certains des résultats de ce cours, nous emploierons également les notations suivantes permettant de définir une addition sur les n-uplets de scalaires.

Notation 2. Soit $m \in \mathbb{N}$; $X = (x_1, \ldots, x_m)$ un élément de $\mathbb{R}^m$ et $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ un autre élément de $\mathbb{R}^m$.
— On note $X + Y := (x_1 + y_1, \ldots, x_m + y_m)$
— Pour tout scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$, on note $\lambda X := (\lambda x_1, \ldots, \lambda x_m)$.

Exemple 3. On écrira alors $(1,\ 2,\ 3) + 4(0,\ -1, \frac{3}{2}) = (1\ -2,\ 9)$.

2 Résolution des systèmes linéaires

2.1 Cas pratique

2.1.1 Commençons par la facilité

Proposition 4. *Un système triangulaire carré admet une et une unique solution si et seulement si tous ses coefficients diagonaux sont non nuls. C'est-à-dire, dans les notations précédentes, que le système*

$$(\mathcal{L}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad + a_{3,3}x_3 + \cdots + a_{3,j}x_j + \cdots + a_{3,n}x_n = b_3 \\ \qquad\qquad\qquad \ddots \qquad\qquad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

admet une et une unique solution si et seulement si si et seulement si $\forall i \in \llbracket 1\,;\,n\rrbracket,\ a_{i,i} \neq 0$.

Remarque 5. Dans le cas où la condition précédente n'est pas respectée, c'est-à-dire si un coefficient diagonal est nul, alors le système peut admettre soit aucune solution, soit une infinité de solution. Précisons cela dit que si le système est homogène (c'est-à-dire se second membre nul) et triangulaire avec au moins un coefficient diagonal nul, alors il admet une infinité de solutions.

Attention ! Bien sûr, si le système n'est pas triangulaire, l'étude des coefficients diagonaux ne fournit aucune information quant à la nature des solutions.

2.1.2 De l'art de se ramener aux cas connus

Théorème 6. *Tout système carré peu être transformé en système triangulaire par une succession d'opérations élémentaires. Le principe étant de triangulariser colonne par colonne en commençant par la colonne de gauche.*

2.1.3 Et le cas des systèmes non carrés ?

Méthode 7 (Cas avec plus d'inconnues que d'équations)**.** Pour un système avec plus d'inconnues que d'équations, on échelonne le système. Puis, on considère temporairement, les inconnues supplémentaires comme paramètres. On exprime les autres inconnues à l'aide de ces paramètres. Et enfin, on conclut en donnant une présentation paramétrique de l'ensemble des solutions.

Méthode 8 (Cas avec plus d'équations que d'inconnues)**.** Pour un système avec plus d'équations que d'inconnues, on échelonne le système. Ceci conduit à la fin à exprimer des équations supplémentaires ne dépendant d'aucune inconnue. Ces équations sont dites *non-principales*. Selon qu'elles soient vraies ou fausses, le système admet ou non des solutions.

2.2 Tentative de généralisation de la méthode

2.2.1 Opérations élémentaires

Définition 9. On dit que deux systèmes linéaires de même format (même nombre d'inconnues et même nombre d'équations) sont équivalent lorsqu'ils ont même ensemble de solutions.

Définition 10. Notons $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes du système linéaire $\mathcal{L}$. On appelle opération élémentaire sur le système linéaire, les trois opérations suivantes :

- La permutation de lignes : pour deux indices $(i,j) \in (\llbracket 1\,;\,n \rrbracket)^2$, l'échange de la ligne L_i avec la ligne L_j. On note $L_i \leftrightarrow L_j$
- La dilatation : pour un indice $i \in \llbracket 1\,;\,n \rrbracket$ et pour un réel λ **non nul**, on multiplie la ligne L_i par λ. On note $L_i \leftarrow \lambda L_i$.
- La transvection (ou combinaison) : pour deux indices $(i,j) \in (\llbracket 1\,;\,n \rrbracket)^2$ avec $i \neq j$ et un scalaire α, on remplace L_i par la combinaison $L_i + \alpha L_j$. On note $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$.

Théorème 11. *Les opérations élémentaires transforment un système linéaire en un système linéaire qui est équivalent. Autrement dit, les opérations élémentaires préservent l'ensemble des solutions d'un système.*

Attention ! En toute rigueur, on effectue les opérations élémentaire une par une. On peut parfois, pour rédiger plus vite, en effectuer plusieurs à la fois. Mais il faut alors prendre garde à ne pas faire n'importe quoi. Par exemple on en peut pas pratiquer simultanément les deux opérations suivantes :
$$\begin{cases} L_1 \leftarrow L_1 + L_2 \\ L_2 \leftarrow 2L_1 + 2L_2 \end{cases}.$$

Attention ! Il faut également prendre garde à ce que le coefficient de dilatation soit toujours non nul. Cela semble évident, mais lorsque l'on travaille avec des systèmes à paramètres, cela impose parfois de faire des disjonction de cas.

2.2.2 Algorithme du pivot de Gauss

Théorème 12. *Tout système carré peut être transformé en un système triangulaire équivalent à l'aide d'une succession d'opérations élémentaires.*

Exercice 13. Soit $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ Montrer que le système $\begin{cases} ax + by = 0 \\ cx + dy = 0 \end{cases}$ admet une unique solution si et seulement si $ad - bc \neq 0$.

2.3 Structure de l'ensemble des solutions

2.3.1 Cas des systèmes homogènes

Commençons par une remarque triviale mais finalement intéressante :

Remarque 14. Le p-uplet $(0, 0, \cdots, 0)$ est toujours solution du système **homogène** $\mathcal{L}_0$.

Lemme 15 (Principe de linéarité)**.** *Si $(x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est une solution particulière du système homogène $\mathcal{L}_0$, alors pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$ le p-uplet $(\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p)$ est également solution. Si de plus $(x_1', x_2', \cdots, x_p')$ est une autre solution, alors $(x_1' + x_1, x_2' + x_2, \cdots, x_p' + x_p)$ est également solution.*

Ce lemme anodin a déjà une conséquence importante.

Corollaire 16. *Un système linéaire homogène admet soit une unique, soit une infinité de solutions.*

Remarque 17. Un système linéaire homogène admettant strictement moins d'équations que d'inconnues (cas $n < p$ dans nos notations) admet une infinité de solutions.

Nous prouverons cette dernière remarque au chapitre sur la dimension des espaces vectoriels.

2.3.2 Cas des systèmes affines

Lorsqu'on ajoute un second membre, la situation évolue car le système peut n'avoir aucune solution. C'est néanmoins le seul cas supplémentaire possible par rapport au cas homogène.

Lemme 18. *Considérons deux p-uplets $x = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ et $y = (y_1, y_2, \cdots, y_p)$ et supposons que x soit solution du système $\mathcal{L}$. Alors y est solution de $\mathcal{L}$ si et seulement si le p-uplet $x - y$ est solution du système homogène $\mathcal{L}_0$.*

Ceci permet de décrire l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ pourvu que l'on en connaisse au moins une.

Théorème 19 (Structure de l'ensemble des solutions)**.** *Notons $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}_0$ les ensembles respectifs des solutions de $\mathcal{L}$ et $\mathcal{L}_0$. Soit également $X := (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ une solution particulière de $\mathcal{L}$. Alors, on peut écrire l'ensemble des solutions de $\mathcal{L}$ comme :*

$$\mathcal{S} = \{X + Y \mid Y \in \mathcal{S}_0\} = \{(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_p + y_2) \mid (y_1, y_2, \cdots, y_p) \in \mathcal{S}_0\}$$

Autrement dit, on obtient à partir d'une solution particulière, toutes les solutions en ajoutant les solutions du système homogène.

Corollaire 20. *Un système linéaire admet soit aucune, soit une unique, soit une infinité de solutions.*

On peut même être plus précis, l'unicité de la solution d'un système linéaire ne dépend que du système homogène associé

Proposition 21. *Pour un système linéaire $\mathcal{L}$ et son système homogène associé $\mathcal{L}_0$, nous avons les résultats suivants :*

- *Si $\mathcal{L}_0$ admet une unique solution, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une unique solution.*
- *Si $\mathcal{L}_0$ admet une infinité de solutions, alors $\mathcal{L}$ admet soit aucune, soit une infinité de solutions.*

Par ailleurs, pour les systèmes carrés, on peut être plus précis. Un système carré admet une et une unique solution si et seulement si le système homogène associé admet une unique solution.

Définition 22 (Système de Cramer)**.** Un système linéaire carré est dit de Cramer s'il admet une unique solution.

Corollaire 23. *Pour un système carré, la propriété d'être de Cramer ne dépend que du système homogène associé.*

On peut également donner un résultat analogue à la remarque 17 dans le cas des systèmes avec second membre.

Remarque 24. Un système linéaire avec strictement moins d'équations que d'inconnues admet soit aucune, soit une infinité de solutions.

3 Le formalisme matriciel

3.1 Matrices

Une matrice est simplement un tableau de nombre. On va définir sur ces tableaux des opérations d'addition et de multiplication.

3.1.1 Définition

Définition 25. Soit $(n,p) \in (\mathbb{N}^*)^2$. On appelle matrice à n lignes et p colonnes un tableau de scalaires (réels ou complexes) $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

On la représente par un tableau rectangulaire $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,p} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots a_{n,n} & \end{pmatrix}$.

On note $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices à n lignes et p colonnes à coefficient dans $\mathbb{K}$ (c'est-à-dire que $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ désigne les matrices à coefficients réels et $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{C})$ les matrices à coefficients complexes). On note simplement $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées à n lignes et n colonnes.

Définition 26 (Matrice nulle)**.** On appelle matrice nulle de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ la matrice dont tous les coefficients valent zéro. On la note $0_{n,p}$ ou simplement 0_n pour la matrice nulle carrée de taille n.

3.1.2 Calcul matriciel

On définit maintenant des opérations sur les matrices. L'addition se fait assez naturellement : coefficient par coefficient.

Définition 27 (Addition de matrices de même format)**.** Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ sont deux matrices de même format, alors on définit la somme $A+B$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ égale à

$$A+B = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ avec } \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\ \forall j \in [\![1\,;\,p]\!],\ c_{i,j} = a_{i,j} + b_{i,j}$$

Attention ! La somme $A+B$ n'est définie que si les matrices A et B sont de même format.

On définit également la multiplication d'une matrice par un scalaire, comme la multiplication de tous les coefficients par ce même scalaire.

Définition 28 (Multiplication externe)**.** Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$ est une matrice et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors on définit le produit $\lambda \cdot A$ comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ égale à

$$\lambda \cdot A = (c_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}} \text{ avec } \forall i \in [\![1\,;\,n]\!]\ \forall j \in [\![1\,;\,p]\!],\ c_{i,j} = \lambda a_{i,j}$$

Proposition 29. *Soit n et p deux entiers naturels non nuls. Les opérations d'addition et de produit externes des matrices $n \times p$ vérifient les règles suivantes. Pour $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$, on a :*

i) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$.

ii) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$.

iii) $A + B = B + A$.

On définit maintenant un produit matriciel. Malheureusement, celui-ci n'est pas défini de la manière qui pourrait sembler naturelle.

Définition 30 (Produit matriciel)**.** Soit n ,p et q trois entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}}$ et $B = (b_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant q}}$, alors on définit le produit AB comme la matrice de $\mathcal{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ égale à

$$AB = (c_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \text{ où } \forall i \in [\![1 ; n]\!],\ \forall j \in [\![1 ; q]\!],\ c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

Attention ! Le produit AB est défini uniquement si le nombre de colonnes de A est égal au nombre de lignes de B.

Remarque 31. Cette définition peut-être peu naturelle du produit de matrice trouvera une application élégante dans la résolution de système linéaire, cf. section suivante. En outre, on en donnera une interprétation lumineuse en étudiant les espaces vectoriels plus tard dans l'année.

Les règles du produit matriciel diffèrent légèrement de celles de la multiplication dans $\mathbb{K}$. Notons les deux principales différences.

Attention ! Soit n ,p et q trois entiers naturels non nuls. Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{R})$.

L'égalité $AB = 0_{n,q}$ **n'implique pas** en général que l'une des deux matrices A ou B est nulle.

Exemple 32. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Attention. *Le produit n'est pas commutatif* ! On **n'a pas** en général $AB = BA$. Premièrement l'un de ces termes peut être défini sans que l'autre ne le soit. Deuxièmement même lorsque ces deux termes ont un sens (le lecteur se demandera quand se produit ce cas), ils peuvent être de formats différents. Troisièmement, lorsque ces deux termes existent et sont de même format, ils peuvent encore être différents.

Exemple 33. $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ mais $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Listons maintenant une liste de propriété « sympathiques » car elles rappellent ce qu'il se passe pour la multiplication des scalaires.

Proposition 34. *Soit A, B et C trois matrices (le lecteur déterminera les formats nécessaires pour que les égalités aient un sens) et $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$. On peut alors écrire, sous réserve que les termes suivants aient un sens :*

i) $A(B + C) = AB + AC$.

ii) $(A + B)C = AC + BC$.

iii) $(\lambda A)B = \lambda(AB) = A(\lambda B)$.

iv) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$.

v) $(AB)C = A(BC)$.

3.1.3 Cas des matrices carré

L'intérêt des matrices carré vient du fait que le produit est alors « interne » ; le produit de deux matrices carrées (de même taille, sinon il n'a pas de sens) est encore une matrice carré de même taille.

Proposition-Définition 35 (Matrice identité)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Il existe une unique matrice I_d qui est un élément neutre à droite pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_d vérifiant* $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ MI_d = M$.

Il existe également une unique matrice I_g qui est un élément neutre à gauche pour le produit matriciel. C'est-à-dire une matrice I_g vérifiant $\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}),\ I_gM = M$.

Ces deux matrices sont en fait les mêmes, on l'appelle la matrice identité et on la note I_n et on a :

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

On définit également les matrices diagonales et les matrices triangulaires.

Définition 36 (Matrices diagonales)**.** Une matrice carrée $D = (d_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite diagonale si $d_{i,j} = 0$ dès que $i \neq j$.

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$$

Définition 37 (Matrices triangulaires)**.** Les matrices triangulaires peuvent être inférieures ou supérieures.

— Un matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire supérieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i > j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & t_{1,2} & \dots & t_{1,n} \\ 0 & t_{2,2} & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & t_{n-1,n} \\ 0 & \dots & 0 & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

— Un matrice carrée $T = (t_{i,j})_{1 \leq i,j \leq n}$ est dite triangulaire inférieure lorsque $t_{i,j} = 0$ dès que $i < j$.

$$T = \begin{pmatrix} t_{1,1} & 0 & \dots & 0 \\ t_{2,1} & t_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ t_{n,1} & \dots & t_{n,n-1} & t_{n,n} \end{pmatrix}$$

Remarque 38. Les matrices diagonales sont exactement les matrices qui sont à la fois triangulaires supérieures et triangulaires inférieures

Proposition 39 (Produit de matrices diagonales ou triangulaires)**.** *Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, D_1, D_2 deux matrices diagonales,* $D_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$, $D_2 = \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mu_n \end{pmatrix}$*, alors αD_1, $D_1 + D_2$ et*

$D_1D_2 = \begin{pmatrix} \lambda_1\mu_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2\mu_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda_n\mu_n \end{pmatrix}$ *sont des matrices diagonales.*

On dit que l'ensemble des matrices diagonales $\mathcal{D}_n$ est stable par produit.
Soit T_1, T_2 deux matrices triangulaires supérieures et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors $\alpha T_1, T_1+T_2$ et T_1T_2 sont des matrices triangulaires supérieures. L'ensemble des matrices triangulaires supérieures $\mathcal{T}_n^+$ est stable par produit, de même pour $\mathcal{T}_n^-$ l'ensemble des matrices triangulaires inférieures.

3.1.4 Matrices inverses

Définition 40. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On dit que M est inversible si $\exists A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}),\ AM = MA = I_n$. On appelle groupe linéaire d'ordre n et on note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, l'ensemble des matrices inversibles de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Attention ! Il existe des matrices non nulles qui ne sont pas inversibles.

Exercice 41. Prouver que la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'est pas inversible.

Proposition 42 (unicité de l'inverse)**.** *Si $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible, alors $\forall (A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2,\ AM = BM \Leftrightarrow A = B$. Ainsi l'inverse d'une matrice (s'il existe) est unique et on le note M^{-1}.*

On a également un lemme très utile qui dit que pour inverser une matrice, il suffit de trouver un inverse à gauche ou à droite.

Lemme 43 (Miracle de l'inversibilité des matrices carrées)**.** *Soit $n \in \mathbb{N}$ et $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Soit A une autre matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Si $AM = I_n$, alors M est inversible et $A = M^{-1}$.*
De même si $MA = I_n$, alors M est inversible et $A = M^{-1}$.

Proposition 44. *Soit $(A,B) \in (\mathcal{M}_n(\mathbb{K}))^2$. Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.*

3.1.5 Transposition

Définition 45. Soit n et p deux entiers naturels non nuls et $M = (m_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. On appelle transposée de M et on note M^{T} la matrice $M^{\mathrm{T}} = \left(m'_{i,j}\right)_{\substack{1 \leqslant i \leqslant p \\ 1 \leqslant j \leqslant n}} \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\forall i \in [\![1\,;\,p]\!],\ \forall j \in [\![1\,;\,n]\!],\ m'_{i,j} = m_{j,i}.$$

Attention ! Si A n'est pas une matrice carré, alors A et A^{T} sont des matrices de formats différents.

Proposition 46. *Soit n, p et q trois entiers naturels non nuls et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors :*

$$(AB)^{\mathrm{T}} = B^{\mathrm{T}} A^{\mathrm{T}}.$$

Corollaire 47. *Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est une matrice carré inversible, alors A^{T} est également inversible et $\left(A^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$.*

Lemme 48. *Soit $n \in \mathbb{N}$ et M une matrice carré de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors M^{T} est de même format que M et :*
- *Si M est diagonale, alors M^{T} aussi et même $M^{\mathrm{T}} = M$.*
- *Si M est triangulaire supérieure, alors M^{T} est triangulaire inférieure et vice-versa.*

3.2 Lien avec les systèmes linéaires

Nous allons maintenant utiliser le formalisme matriciel pour l'appliquer aux systèmes linéaires

3.2.1 Principe général

Nous rappelons les notations définies au début de ce chapitre.

Notation 49. Soient n et p deux entiers naturels non nuls. On note $(\mathcal{S})$ le d'équations :

$$(\mathcal{S}) : \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,j}x_j + \cdots + a_{1,p}x_p = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,j}x_j + \cdots + a_{2,p}x_p = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,j}x_j + \cdots + a_{n,p}x_p = b_n \end{cases}$$

où $(a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}}$ est une famille d'éléments de $\mathbb{R}$ et $(b_1, b_2, \cdots, b_n)$ un élément de $\mathbb{R}^n$.

Proposition 50 (Remarque fondamentale)**.** *Soit $(\mathcal{S})$ le système linéaire de la notation 49. On pose $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$, $B = (b_i)_{1\leqslant i\leqslant n} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $X = (x_i)_{1\leqslant i\leqslant p} \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R})$. Alors, le p-uplet $(x_1, \cdots, x_p)$ est solution de $(\mathcal{S})$ si, et seulement si $AX = B$.*

Ceci donne une écriture condensée et plus facilement manipulable des systèmes linéaires.

3.2.2 Inversibilité des matrices

Proposition 51. *Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On se sonne une matrice carré A de taille n et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$. Alors le système $AX = Y$ d'inconnue X est de Cramer si et seulement si la matrice A est inversible. Dans ce cas, l'unique solution du système est $X = A^{-1}Y$.*

La méthode de calcul de A^{-1} par résolution des systèmes $AX = Y$ pour tout second membre Y repose en fait sur le lemme suivant.

Lemme 52. *Soit $(n, p) \in (\mathbb{N}^*)^2$ et A et B deux matrices de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Alors on a l'équivalence suivante :*

$$A = B \iff (\forall X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{R}),\ AX = BX)$$

C'est-à-dire que A et B sont égales si et seulement si elles ont même produit sur toutes les matrices colonnes.

3.3 Détermination pratique de l'inverse par opérations élémentaires

Définition 53. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout couple $(i, j) \in ([\![1\,;\,n]\!])^2$, on appelle matrice élémentaire d'indices (i, j) et on note $E_{i,j}$ la matrice carrée de taille n dont tous les coefficients sont nuls saufs celui en i-ème ligne et j-ème position qui vaut 1. C'est-à-dire que :

$$E_{i,j} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{c} \qquad\quad j \\ \qquad\quad \downarrow \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & & 1 & & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

Remarque 54. Ces matrices s'appellent matrices élémentaires car elles permettent de décomposer toute matrice carré de taille n comme une combinaison linéaires de ces matrices élémentaires. En outre, une telle décomposition est unique. Nous verrons tout ceci au chapitre sur les espaces vectoriels. Plus spécifiquement si $A = (a_{i,j})_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, alors on peut écrire :

$$A = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant n}} a_{i,j}E_{i,j}.$$

Ces matrices élémentaires permettent également de traduire les opérations élémentaires comme un produit matriciel. Explicitions ce que l'on veut dire. Nous avons d'abord besoin d'un lemme.

Lemme 55 (Multiplication à gauche par une matrice élémentaire)**.** *Soit n et p deux entiers naturels non nuls fixés. Si $A = (a_{i,j})_{\substack{1 \leqslant i \leqslant n \\ 1 \leqslant j \leqslant p}} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :*

$$E_{i,j}A = \begin{array}{c} \\ \\ i \longrightarrow \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{j,1} & a_{j,2} & \dots & & a_{j,p} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

C'est-à-dire que la i-ème ligne de la matrice $E_{i,j}A$ est la j-ème ligne de A et que les autres lignes sont nulles.

Corollaire 56. *Nous pouvons maintenant traduire chaque opérations élémentaires par la multiplication à gauche d'une certaine matrice. On considère une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{R})$ et on note $(L_1, L_2, \dots, L_n)$ les lignes de A. Alors :*

- *La permutation $L_i \leftrightarrow L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $(I_n + E_{i,j} + E_{j,i} - E_{i,i} - E_{j,j})$.*
- *La dilatation $L_i \leftarrow \lambda L_i$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$.*
- *La transvection $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ correspond à la multiplication à gauche par $I_n + \alpha E_{i,j}$.*

Proposition 57. *On reprend les notations précédentes. Lorsqu'on effectue une suite d'opérations élémentaires sur la matrice A, ceci revient à multiplier A à gauche par une matrice d'opérations M. La matrice M est alors inversible et si l'on souhaite trouver son expression, il suffit d'appliquer la même suite d'opérations élémentaires à la matrice identité.*