Colles semaine 9

En bref

- Matrices : formules de sommes et de produit.
- Transposées des matrices.
- Traduction matricielle des systèmes linéaires.
- Équivalence logique entre l'inversibilité des matrices carré et le caractère de Cramer des systèmes linéaires associés.
- Algorithme pratique pour déterminer l'inversibilité et l'éventuel inverse d'une matrice carrée.
- Critère du déterminant pour l'inversibilité d'une matrice (ou le caractère de Cramer d'un système 2×2.
- Théorie des applications :
  - Injection, surjection et bijection.
  - Bijection réciproque
  - Image directe et images réciproques de sous-ensemble par une application.
  - Cas des applications réelles. Théorème de la bijection

Exemples non exhaustifs de questions de cours

Les suggestions suivantes restent des exemples d'illustrations, les colleurs ont toute liberté pour poser une question de cours.

- Inverser la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ou une variante par opérations élémentaires (directement sur la matrice ou bien par introduction du système sous-jacent).
- Montrer que la composée de deux injections (resp. surjections, resp. bijections) est encore injective (resp. surjective, resp. bijective).
- Pour $f : E \to F$ et $B \subset F$ montrer que $f(f^{-1}(B)) \subset B$. Exhiber un exemple où l'inclusion est stricte.
- Pour $f : E \to F$ et $A \subset E$ montrer que $f^{-1}(f(A)) \supset A$. Exhiber un exemple où l'inclusion est stricte.
- Pour $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ fixé, montrer que l'application $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) & \to & \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & AX \end{array}$ est injective si et seulement si elle est surjective.

Note aux colleurs

- La propriété qui affirme que l'unicité de la solution d'un système carré entraîne son existence est connue des élèves sous le nom de « miracle des systèmes carrées ».
- De même, on appelle « miracle de l'inversibilité carrée » le fait que l'inversibilité à gauche d'une matrice carrée entraîne son inversibilité à droite et vice-versa. Les étudiants ont compris qu'il s'agit d'un seul et même miracle.
- Afin d'exprimer simplement les formules de produit matriciel, nous adoptons provisoirement la notation $A[i, j]$ pour désigner le coefficients de la matrice A en i-ème ligne et j-ème colonne. Ceci ayant pour avantage non négligeable de bien préciser que ce coefficient est une fonction de la matrice A.
- On attendra la semaine prochaine pour dériver des bijections réciproques réelles.

En détail

Inversion des matrices carrées

Reprise du programme précédent

Théorie des applications

1 Généralités

Définition 1 (Restriction)**.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une fonction. Pour toute partie $A \subset E$, on définit une fonction de A dans F que l'on appelle la restriction de f à A et que l'on note $f_{|A}$. Cette fonction est définie de la manière suivante : $f_{|A} : \begin{array}{ccc} A & \to & F \\ x & \mapsto & f(x) \end{array}$.

Définition 2 (Prolongement)**.** Soit A et F deux ensembles et $f : A \to F$ une fonction. Si E est un ensemble qui contient A et g est une fonction de E dans F, on dit que g est un prolongement de f si la restriction de g à A est la fonction f.

2 Injectivité et surjectivité

2.1 Vocabulaire

Définition 3 (Injection)**.** Soit f une fonction entre deux ensembles E et F. On dit que f est *injective* si

$$\forall (x, x') \in E^2,\ \Big(f(x) = f(x')\Big) \implies (x = x')$$

Définition 4 (Surjection)**.** Soit f une fonction entre deux ensembles E et F. On dit que f est *surjective* si

$$\forall y \in F,\ \exists x \in E,\ f(x) = y$$

Définition 5. Une fonction de E dans F est dite *bijective* si elle est à la fois injective et surjective.

2.2 Propriété élémentaires

Proposition 6 (Unicité des antécédents pour les fonctions injectives)**.** *Une fonction f de E dans F est injective si et seulement si tout élément de F admet au plus un antécédent.*

Proposition 7 (Stabilité par composition)**.** *Soit E, F, G trois ensembles et $f \in F^E$ et $g \in G^F$.*
- *Si f et g sont chacune injective, alors $g \circ f$ est injective.*
- *Si f et g sont chacune surjective, alors $g \circ f$ est surjective.*
- *Si f et g sont chacune bijective, alors $g \circ f$ est bijective.*

2.3 Bijection et bijections réciproques

Définition 8 (Application réciproque d'une bijection)**.** Soit f une fonction bijective de E dans F. Alors on peut définir une fonction qui à tout élément de F associe son unique antécédent par f. Cette fonction ainsi définie de F dans E est appelée réciproque de f et se note f^{-1}.

Proposition 9. *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$ et $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$.*

Corollaire 10. *Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors sa réciproque f^{-1} est encore une bijection de F sur E. De plus, la réciproque de f^{-1} est la fonction f elle-même.*

Proposition 11. *Soit Soit $f : E \to F$ une fonction. S'il existe une fonction $g : F \to E$ telle que $f \circ g = \mathrm{id}_F$ et $g \circ f = \mathrm{id}_E$; alors f est bijective et la fonction g est la réciproque de f.*

3 Images directes et images réciproques

3.1 Vocabulaires

Définition 12 (Images directes)**.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également A un sous-ensemble de E. On appelle image directe de A (par f) et on note $f(A)$ le sous-ensemble de F suivant :

$$f(A) = \{f(a) \mid a \in A\}$$

Définition 13 (Images réciproques)**.** Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces deux ensembles. Soit également B un sous-ensemble de F. On appelle image réciproque de B (par f) et on note $f^{-1}(B)$ le sous-ensemble de E suivant :

$$f^{-1}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}$$

Remarque 14 (Images réciproques et bijection). Si l'on se donne $f : E \to F$ une fonction *bijective* et B un sous-ensemble de F, la notation $f^{-1}(B)$ est à priori ambiguë. Elle peut désigner soit l'image réciproque de B par f, soit l'image directe de B par f^{-1}. Heureusement, ces deux notions correspondent exactement au même ensemble comme tout bon étudiant de PTSI sait le montrer.

3.2 Propriétés élémentaires

Proposition 15 (Union unions et intersection)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Alors :*

i) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cup B_2) = f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2)$.

ii) Pour tout $B_1 \subset F$ et $B_2 \subset F$, on a $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$.

iii) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cup A_2) = f(A_1) \cup f(A_2)$.

iv) Pour tout $A_1 \subset E$ et $A_2 \subset E$, on a $f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$.

Pour le dernier cas, le lecteur est invité à chercher des exemples montrant que l'inclusion peut être stricte.

Proposition 16 (Composition d'image directe et réciproque)**.** *Soit E et F deux ensembles et $f : E \to F$ une application entre ces ensembles. Soit également A une partie de E et B une partie de F. Alors :*

i) $f^{-1}(f(A)) \supset A$.

ii) $f(f^{-1}(B)) \subset B$.

Là encore, le lecteur est invité à chercher des exemples prouvant que ces inclusions peuvent être strictes.

4 Le cas important des fonctions réelles

4.1 Deux résultats cruciaux

Théorème 17 (Théorème des valeurs intermédiaires, admis)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et $[c\,;\,d]$ un autre intervalle de $\mathbb{R}$. Soit également $f : I \to [c\,;\,d]$ une fonction continue. Si c et d admettent chacun un antécédent, alors la fonction f est surjective sur l'intervalle $[c\,;\,d]$.*

Théorème 18. *Soit fonction f définie sur un intervalle de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est strictement monotone, alors elle est injective.*

4.2 Reformulations diverses

Théorème 19 (Image des intervalles par les fonctions continues)**.** *Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ et continue. Alors, l'image directe $f(I)$ est un intervalle de $\mathbb{R}$.*

Théorème 20 (Image des segments par les fonctions continues, admis). *Soit I un intervalle **fermé et borné** (on dit aussi un segment) de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I à valeur dans $\mathbb{R}$ et continue. Alors, l'image directe $f(I)$ est un intervalle fermé et borné de $\mathbb{R}$.*

Théorème 21 (Théorème de la bijection). *Soit $[a\,;\,b]$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $[a\,;\,b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $[a\,;\,b]$ et J où J est l'intervalle définie par :*

- *$J = [f(a)\,;\,f(b)]$ si f est strictement croissante.*
- *$J = [f(b)\,;\,f(a)]$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $[a\,;\,b]$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.

Théorème 22 (Théorème de la bijection, version aux limites). *Soit $]a\,;\,b[$ un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur $]a\,;\,b[$ à valeurs dans $\mathbb{R}$. On suppose de plus que f admet des limites en a et b que l'on note respectivement ℓ_a et ℓ_b. Si f est une fonction continue et strictement monotone, alors elle réalise une bijection entre les intervalles $]a\,;\,b[$ et J où J est l'intervalle définie par :*

- *$J =]\ell_a\,;\,\ell_b[$ si f est strictement croissante.*
- *$J =]\ell_b\,;\,\ell_a[$ si f est strictement décroissante.*

De plus, la réciproque de f est encore une bijection entre J et $]a\,;\,b[$ qui a même sens de variation que f et qui est également continue.
Ce théorème reste valables si les bornes a et b ou les limites ℓ_a et ℓ_b sont infinies.